

Matematika B4

V. gyakorlat

2005. március 17.

1. Nevezetes eloszlások várható értéke

1. Geometriai eloszlás (optimista)

Az első 4-es dobás sorszámanak várható értéke: $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(5/6)^{k-1}(1/6) = 6$

Általában a p paraméterű optimista geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{p}$.

2. Geometriai eloszlás (pesszimista)

Az első 4-es dobás előtti dobások számának várható értéke: $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(5/6)^k(1/6) = 5$; ez már csak azért sem meglepő, mert az első 4-est a 6. dobásra várjuk, így 5 dobás előzi meg.

Általánosságban is: a p paraméterű pesszimista geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{p} - 1$.

3. Binomiális eloszlás

8 cinkelt érmét ($P(\text{fej}) = \frac{3}{4}$) feldobva hány fejet várunk? $\sum_{k=1}^8 k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^8 k \binom{8}{k} (\frac{3}{4})^k (\frac{1}{4})^{8-k} = 6$

Általában az n -edrendű, p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke np .

4. Poisson-eloszlás

Az egy napi budapesti lakástűzek ($\lambda = 5$) várható értéke $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{5^k}{k!} e^{-5} = 5$

A λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke λ .

2. Vegyes feladatok

1. IV/17

Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy 5.

- Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?
- Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?
- Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?

2. IV/19

A kocogj velünk mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullancsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

3. IV/21

Anna és Béla két kockával játszanak. Anna akkor fizet Bélának, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. Béla akkor fizet Annának, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobna. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzüsszegeben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

4. IV/23

Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X -szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzássorozatot egy kísérletnek.

- Adjuk meg az X valószínűségi változó eloszlását!
- Számítsuk ki az X valószínűségi változó várható értékét!

5. III/18 várható értéke

Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készülnek, és 7-en felelnek. Mi a készületlen felelők számának várható értéke?

6. II/17

Egy P kockának 4 piros és 2 fehér, egy Q kockának 2 fehér és 4 piros lapja van. Feldobunk egy érmét. Ha a dobás fej, a P-vel, ha írás, akkor Q-val dobunk.

- Mi annak a valószínűsége, hogy a dobás piros lesz?
- És ha tudjuk, hogy fejet dobtunk?
- Mi annak a valószínűsége, hogy a k . dobás piros lesz?
- És ha tudjuk, hogy az előző $k - 1$ dobás mind piros volt?
- Tudjuk, hogy az eredmény piros. Mi a valószínűsége, hogy P kockával dobtunk?

7. IV/24

Két ember asztaliteniszt játszik. A győztesnek három játszmat kell nyernie. Legyen p , illetve $q (=1-p)$ annak a valószínűsége, hogy egy játszmat az első játékos, illetve a második játékos nyer. Mennyi a játszmák számának várható értéke? Mikor lesz maximális a játszmák számának várható értéke?

8. új

Dobókockával dobunk addig, amíg 6-ost nem dobunk.

- Mi a valószínűsége annak, hogy a dobások száma páros?
- Mi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb tízszer kell dobnunk?

9. IV/25

Két kosaras felváltva dob. Ha az egyikük dobása sikeres, akkor abbahagyják a dobálást. Az első 0.5, a második 0.6 valószínűséggel dob sikeresen.

- Mi a valószínűsége, hogy az első játékos nyer?
- Mi a kosárra dobások számának várható értéke?

10. IV/27

Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!

11. IV/28

Egy dobozban 2 piros és 2 fehér golyó van. Visszatevéssel húzzunk az első pirosig, és jelöljük X -szel a húzások számát. Számoljuk ki: X , X^2 , 2^X , $\frac{1}{2^X}$ várható értékét!