Matematika B4
IV. gyakorlat

2005. március 10.

1. Bevezető kérdések

1. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?

   a) Hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?

   b) Hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig?

   c) Hányadikra jön a következő leállás?

   d) Hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza)

   Megoldás: Lényegében megegyezik a 3. feladatsor 20. feladatával, kivéve c) az Geometriai(optimista).

2. a) Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?

   Megoldás: $E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5.$

   b) És ha két kockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel, mennyi az összeg várható értéke?

   Megoldás: Legyen X a pirossal dobott szám és Y a kékkel dobott szám. Nyílván X és Y eloszlása megegyezik. A várható érték linearitásából: $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3,5 + 3,5 = 7.$

   c) És a két dobott szám különbségének várható értéke (piros kockával dobott számból kivonjuk a kék kockával dobott számot)?

   Megoldás: A várható érték linearitásából: $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 3,5 - 3,5 = 0.$

   d) És a két dobott szám eltérésének várható értéke (nagyobbik számból kivonjuk a kisebbet)?

   Megoldás: Az eseménytér:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
2	*1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
3	*2*	*1*	*0*	*1*	*2*	*3*
4	*3*	*2*	*1*	*0*	*1*	*2*
5	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	*1*
6	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*

   Innen $E(|X-Y|) = \frac{10\cdot 1+8\cdot 2+6\cdot 3+4\cdot 4+2\cdot 5}{36} = \frac{70}{36}.$

3. Annak a valószínűsége, hogy egy évben egyetlen repülőgép sem zuhan le 10%. Változatlan forgalmi viszonyokat feltételezve, mire tippel, hány repülőgép fog lezuhanni a következő évben.

   Megoldás: Másik dokumentumban.

2. Poisson eloszlás

Ha a X egy valós valószízűségi változó az $x_k = k$ (k=0,1,2,...) értékeket veheti fel és

$$P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ahol $\lambda > 0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük. *Feladatok:*

4. Egy kollégiumban egy év alatt 0.1%-os valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 év alatt legalább 1 tűzeset van?

   Megoldás: Komplementermódszerrel: $P = 1 - 0,999^5 \approx 0,00499001$.
   Poisson eloszlással közelítve: $\lambda = 0,005$, *így* $P = 1 - e^{-0,005} \approx 0,00498752$.
   Jól látható, hogy az eltérés minimális.

5. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

   Megoldás: Másik dokumentumban.

6. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négyes gyakoriság ugyanolyan valószínűséggel fordul elő, mint az ötös gyakoriság. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a kettes gyakoriság.

   Megoldás: Másik dokumentumban.

7. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

   Megoldás: Másik dokumentumban.

8. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhuba van?És annak, hogy az első 6 oldalon nincs egy sem?

   Megoldás: Másik dokumentumban.

3. Várható érték

Ha X eloszlása: $P(X = x_i) = p_i$, akkor X várható értéke:

$$\sum_i x_i p_i \quad \text{, feltéve ha} \quad \sum_i |x_i| \, p_i < \infty$$

$t(X)$ várható értéke:

$$\sum_i t(x_i) p_i \quad \text{, feltéve ha} \quad \sum_i |t(x_i)| \, p_i < \infty$$

Feladatok:

9. A diszkrét X eloszlás tagjai: p(x)=$\frac{x^2}{30}$ (x=1,2,3,4). Mennyi az eloszlás várható értéke?

   Megoldás: Másik dokumentumban.

10. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzék meg?

    Megoldás: Másik dokumentumban.

11. Albert és Béla a következőt játszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-t kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék hosszú távon?

    Megoldás: Másik dokumentumban. Az eseménytér:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*0*	*1*	*4*	*9*	*16*	*25*
2	*1*	*0*	*1*	*4*	*9*	*16*
3	*4*	*1*	*0*	*1*	*4*	*9*
4	*9*	*4*	*1*	*0*	*1*	*4*
5	*16*	*9*	*4*	*1*	*0*	*1*
6	*25*	*16*	*9*	*4*	*1*	*0*

12. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 50 Ft-ot nyer, ha párost dob, 100-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára hosszú távon?

    Megoldás: $E(X) = \frac{3}{6}\cdot(-100) + \frac{1}{6}\cdot 400 + \frac{2}{6}\cdot(\frac{1}{2}\cdot 50 + \frac{1}{2}\cdot(-100)) = \frac{25}{3}$. *Azaz a várható nyeremény pozitív, így előnyös a játék hosszú távon.*

13. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, mekkora, egy szelvénnyel fogadva, nyereségünk várható értéke?

    Megoldás: A lottónál hipergeometrikus eloszlásúak a valószínűségek.
    $E(X) = 700\cdot\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} + 10000\cdot\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} + 789000\cdot\frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} + 535000000\cdot\frac{1}{\binom{90}{5}} \approx 15,73+8,12+7,63+12,17 = 43,66.$

14. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?

    a) Feltéve hogy az utolsó dobást is beleszámítjuk?
    b) Feltéve hogy az utolsó dobást nem számítjuk bele?

    Megoldás: Másik dokumentumban.

15. Egy dobókockával addig dobunk, amíg kétszer egymásután ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

    Megoldás: Az elején dobhatunk bármit, ezután mindig, ha az utolsó dobással megegyezőt dobunk, akkor végeztünk. Ezt $\frac{1}{6}$ *valószínűséggel érhetjük el bármelyik körben, azaz ez egy geometriai eloszlás lesz eggyel eltolva. Így* $E(X) = 1 + \frac{1}{p} = 1 + 6 = 7$.

16. Egy dobozban 2 piros és 2 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk az első pirosig, és jelöljük X-szel a húzások számát. Számoljuk ki: X, X^2, 2^X, $\frac{1}{2^X}$ várható értékét!

    Megoldás: Másik dokumentumban.

4. Házi feladatok

17. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy 5.

    a) Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?

       Megoldás: $P(X = 2) = 3 \cdot P(X = 5)$. *Kiírva* $e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^5}{5!}$. *Rendezve:* $\lambda^3 = 20$. *Így* $\lambda = \sqrt[3]{20} \approx 2,7$. *Amiből 2 a legvalószínűbb érték.*

    b) Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?

       Megoldás: P=$e^{-\lambda} = e^{-\sqrt[3]{20}} \approx 6,7\%$.

    c) Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?

       Megoldás: $\lambda = \sqrt[3]{20} \approx 2,7$.

18. Mennyi annak a valószínusége, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k öttalálatos szelvény lesz?

    Megoldás: Poissonnal közelítve: $\lambda = \frac{4000000}{\binom{90}{5}}$, *és* $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$.

19. A kocogj velünk mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körölbelül hányan indultak a versenyen.

    Megoldás: Poissonnal közelítve: Legyen λ *az átlagos kullancsok száma, n a versenyzők száma.*
    Ekkor $P(X = 1) = e^{-\lambda} \cdot \lambda = \frac{300}{n}$ *és* $P(X = 2) = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda)^2}{2} = \frac{75}{n}$. *A két egyenletet elosztva egymással adódik, hogy* $\lambda = \frac{1}{2}$. *Ezt visszaírva például az első egyenletbe:* $n = 600\sqrt{e} \approx 989$.

20. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol egyébként is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tudjuk, hogy valószínűbb, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nemlesz. Adjon becslést (lehetőleg élest) annak a valószínűségére, hogy pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt.

    Megoldás: Poissonnal közelítve: Legyen λ *az átlagos gyorshajtók száma. A feladat szerint* $P(X = 0) \leq \frac{1}{2}$, *azaz* $e^{-\lambda} \leq \frac{1}{2}$, *amiből* $\lambda \geq \ln 2$.

21. Anna és Béla két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

    Megoldás: $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, *így akkor igazságos, ha a pénzösszegek aránya 2:1.*

22. Legyen egy diszkrét eloszlás a következő: $x_k = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k}$ és $p_k = \frac{1}{2^k}$. Igazolja, hogy nincs várható értéke!

    Megoldás: Várható érték akkor létezik, ha $E(|X|)$ *véges.* $E(|X|) = \sum p_k \cdot |x_k| = \sum \frac{1}{2^k} \cdot \frac{2^k}{k} = \sum \frac{1}{k}$, *ami közismert hogy nem véges.*

23. Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X-szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzássorozatot egy kísérletnek. a.) Adjuk meg a X valószínűségi változó eloszlását. b.) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét.

    Megoldás: $P(X = 1) = \frac{2}{7} = \frac{6}{21}$
    $P(X = 2) = \frac{5}{7}\frac{2}{6} = \frac{5}{21}$
    $P(X = 3) = \frac{5}{7}\frac{4}{6}\frac{2}{5} = \frac{4}{21}$

$P(X=4)=\frac{3}{21}$, $P(X=5)=\frac{2}{21}$, $P(X=6)=\frac{1}{21}$
$E(X)=1\cdot\frac{6}{21}+2\cdot\frac{5}{21}+3\cdot\frac{4}{21}+4\cdot\frac{3}{21}+5\cdot\frac{2}{21}+6\cdot\frac{1}{21}=\frac{8}{3}$.

24. Két ember asztaliteniszt játszik. A győztesnek három játszmát kell nyernie. Legyen p, illetve q (=1-p) annak a valószínűsége, hogy egy játszmát az első játékos, illetve a második játékos nyer. Mennyi a játszmák számának várható értéke? Mikor lesz maximális a játszmák számának várható értéke?

    Megoldás: Legyen q=1-p. $P(X=3)=p^3+q^3$, $P(X=4)=3p^3q+3q^3p$, $P(X=5)=6p^3q^2+6q^3p^2$
    Amiből $E(X)=3(p^3+q^3)+4(3p^3q+3q^3p)+5(6p^3q^2+6q^3p^2)$. *q helyére visszaírva (1-p)-t és a zárójeleket kibontva, p-re egy polinomot kapunk, aminek szélsőértékét deriválással határozhatjuk meg. Maximuma a [0,1]-n épp 1/2-ben lesz, ahogy azt vártuk.*

25. Két kosaras felváltva dob. Ha az egyikük dobása sikeres, akkor abbahagyják a dobálást. Az első 0.5, a második 0.6 valószínűséggel dob sikeresen.

    a) Mi a valószínűsége, hogy az első játékos nyer?

       Megoldás: $P=0,5+0,4\cdot 0,5^2+0,4^2\cdot 0,5^3+\dots=0,5(1+0,2+0,2^2+\dots)=0,5\frac{1}{1-0,2}=\frac{5}{8}$.

    b) (*) Mi a kosárra dobások számának várható értéke?

       Megoldás: Kiirva a szummát látható, hogy vissza lehet vezetni deriváltsorokra, ha elvégezzük a megfelelő átalakításokat $E(X)=\frac{15}{8}$ *adódik.*

26. Pista és Zoli kockáznak. Mindketten feldobnak egymás után egy piros és egy zöld kockát. Ha Pista 1-t vagy 2-t dob ő nyer és kap Zolitól 5 Ft-ot, ha Zoli 6-t dob ő a nyertes és 11 Ft-ot kap Pistától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszere dobnak nyerőt, nem fizetnek, hanem elölről kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Józsit, dobáljon ő az egyetlen fekete kockával, de a nyerési és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes elfogadni Pistának Zoli ajánlatát?

    Megoldás: Legyen X Pista nyereménye. Ekkor $E(X)=(1-(\frac{4}{6})^2)\cdot 5-(1-(\frac{5}{6})^2)\cdot 11=-\frac{7}{12}$.
    Másik esetben legyen Y Pista nyereménye. Ekkor $E(Y)=\frac{2}{6}\cdot 5-\frac{1}{6}\cdot 11=-\frac{1}{6}$. *Tehát érdemes elfogadnia az ajánlatot. (Bár a legjobb az lenne, ha nem is játszana)*

27. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!

    Megoldás: Tegyük fel, hogy akkor hagyjuk abba a játékot,ha k-szor nyertünk. Ekkor $E_k(X)=p\cdot 100k=(\frac{5}{6})^k\cdot 100k$. *Deriválással meghatározható, hogy maximuma valahol 5 és 6 között. Valójában* $E_5=E_6\approx 201$, *ami kisebb 250-nél.*

28. Egy dobozban 2 piros és 2 fehér golyó van. Visszatevéssel húzunk az első pirosig, és jelöljük X-szel a húzások számát. Számoljuk ki: X, X^2, 2^X, $\frac{1}{2^X}$ várható értékét!

    Megoldás: $P(X=k)=\frac{1}{2^k}$. *Így* $E(X)=\sum k\cdot\frac{1}{2^k}=E(Geo(1/2))=2$.
    $E(X^2)=\sum k^2\cdot\frac{1}{2^k}=6$. *(kétszeres deriváltsor)*
    $E(2^X)=\sum 2^k\cdot\frac{1}{2^k}=\sum 1=\infty$.
    $E(\frac{1}{2^X})=\sum\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum\frac{1}{4^k}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$.

29. * Mennyi a lottón a találatok számának várható értéke?

    Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy egy konkrét számot eltalálok $\frac{5}{90}$*, mivel 5 számot jelöltem meg, mindegyik "potencáilasan* $\frac{5}{90}$ *találat", így a várható érték:* $E(X)=5\cdot\frac{5}{90}=\frac{5}{18}$. *(Megj.: Ezt hívják indikátor módszernek)*