

Matematika B4

VII. gyakorlat

2005. március 31.

1. Bevezető kérdések

1. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka álmomból felriadva a nagymutató az óralap képzeletbeli függőleges középvonalához képest jobbra van? És annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös és 6-os számjegy közötti $\frac{1}{12}$ részén van?

Megoldás: Az első kérdésre a válasz triviálisan $\frac{1}{2}$. A másodikra sem nehéz megmondani, hogy $\frac{1}{12}$

2. A mozigép egy film közepén elromlott, és szerencsétlen módon a szalagtovábbító elszakította a filmszalagot (a szakadás merőleges lett a szalag haladási irányára). Egy képkocka 20mm hosszú és a képkockák között 2mm-es felhasználatlan csík van. Mi a valószínűsége, hogy a masina egy képkockába szakított bele?

Megoldás: "jó eset/összes eset" = $\frac{20}{22}$.

3. Legyen X egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a, b) intervallumon.

a) $P(X < x) = ?$

Megoldás:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } x \in [a, b] \\ 1 & \text{ha } x > b \end{cases}$$

b) $\frac{P(X \in (x_1, x_2))}{x_2 - x_1} = ?$

Megoldás: Ha $x_1, x_2 \in [a, b]$, akkor ez a sűrűségfüggvénnyel egyezik meg, így az értéke: $\frac{1}{b-a}$.

2. Folytonos egyenletes eloszlás

Ha egy véges intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy a pont az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínűséggel essen, akkor a pont koordinátája egyenletes eloszlású az adott intervallumon. Ha a és b ennek a véges intervallumunk két végpontja, akkor az eloszlást $\mathbf{E(a,b)}$ -vel jelöljük. Annak a valószínűsége, hogy egy $E(a,b)$ eloszlású véletlen szám egy d hosszúságú szakaszba essen (a fentiek alapján): $\frac{d}{b-a}$.

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz hossza}}{\text{az egész eseménytér hossza}}$$

Hasonló elgondolás alapján ha egy pont egy véges területű síktartomány bármely részére a kiválasztott rész területével arányos valószínűséggel esik, akkor a pont helyének eloszlása egyenletes eloszlású az adott síktartományon.

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz területe}}{\text{az egész eseménytér területe}}$$

Véges térfogatú térrészen értelmezett egyenletes eloszlás esetén:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz térfogata}}{\text{az egész eseménytér térfogata}}$$

Feladatok:

4. Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pont a kör belsejébe esik?

Megoldás: Legyen a háromszög oldala egységnyi, ekkor a területe: $T_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. A háromszög magassága: $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a beírható kör sugara pedig ennek az egyharmada, így $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Ebből a kör területe: $T_2 = r^2 \pi = (\frac{\sqrt{3}}{6})^2 \pi = \frac{\pi}{12}$. Így a keresett valószínűség: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5. Egy körbe szabályos hatszöget rajzolunk. Mi a valószínűsége, hogy a körben egyenletesen választott pont a hatszögben is benne van?

Megoldás: Legyen a hatszög oldala egységnyi, ekkor a területe (6 szabályos háromszögből áll): $T_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. A körülírt kör sugara szintén egységnyi, azaz $r = 1$. Ebből a kör területe: $T_2 = r^2 \pi = \pi$. Így a keresett valószínűség: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\pi}{\frac{6\sqrt{3}}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

6. Mi a valószínűsége, hogy a (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül

- a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másikkak?

Megoldás: A feltételek szerint: $x \leq 2y$. Így a jó terület a négyzet $y = \frac{x}{2}$ egyenes feletti része. Ennek területe $T = \frac{3}{4}$. Mivel a négyzet területe egységnyi, így $P = T = \frac{3}{4}$.

- b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátától?

Megoldás: A feltételek szerint: $x^2 < y$. Így a jó terület a négyzet $y = x^2$ parabola feletti része. Ennek területe integrálszámítással kapható $T = 1 - \int_0^1 t^2 dt = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Mivel a négyzet területe egységnyi, így $P = T = \frac{2}{3}$.

7. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb $\frac{1}{4}$ területegységnél?

Megoldás: A feltételek szerint: $K = 2x + 2y > 2$ és $T = xy < \frac{1}{4}$. Azaz $y > 1 - x$ és $y < \frac{1}{4x}$, tehát a keresett terület az egyenes feletti és a hiperbola alatti rész. Ennek komplementerének területét számolom ki: Az egyenes alatti rész $T_1 = \frac{1}{2}$ területű háromszög. A hiperbola feletti rész: $T_2 = \int_{\frac{1}{4}}^1 1 - \frac{1}{4x} dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \ln 4$. Így a keresett valószínűség: $P = 1 - T_1 - T_2 = 1 - \frac{1}{2} - (\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \ln 4) = \frac{1}{4} \cdot \ln 4 - \frac{1}{4}$.

8. Mi a valószínűsége, hogy ha a (0, 1) intervallumon kiválasztunk

- a) 2 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a kisebbik pont kisebb x -nél?

Megoldás: "Komplementer-módszerrel": Ennek az eseménynek a komplementere az, hogy mindkét pont nagyobb x -nél, azaz az $[x, 1]$ intervallumba esik. Ennek hossza $1-x$, így: $P = 1 - (1-x)^2$.

- b) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a kisebbik pont kisebb x -nél?

Megoldás: Hasonlóképp: $P = 1 - (1-x)^3$.

c) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a nagyobb pont kisebb x -nél?

Megoldás: Ha a legnagyobb kisebb x -nél, ez ekvivalens azzal, hogy az összes kisebb x -nél, így: $P = x^3$.

d) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a második legkisebb pont kisebb x -nél?

Megoldás: Alapvetően két eset lehetséges: mindhárom pont kisebb x -nél, vagy kettő kisebb és egy nagyobb(ebben az esetben számít, hogy melyik a nagyobb). Ennek megfelelően a valószínűség:

$$P = x^3 + 3 \cdot x^2(1 - x).$$

9. Buffon-féle tűprobléma: Egy nagy papírlapra 4 cm-enként párhuzamos vonalakat húzunk, majd egy 2 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű vonalra esik?

Megoldás: A paraméterezés történjen a tű középpontjának távolsága az egyik egyenestől(y), illetve az egyenessel bezárt szög(α). Könnyen átgondolható, hogy akkor metszi a tű az egyenest, ha $y < \sin(\alpha)$, vagy $y > 4 - \sin(\alpha)$.

(Itt $0 < y < 4$ és $0 < \alpha < \pi$). A jó terület: $T_1 = 2 \cdot \int_0^\pi \sin(x) dx = 2 \cdot 2 = 4$. Az egész eseménytér területe

$$T_2 = 4\pi. \text{ Így } P = \frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{4\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

10. Mi a valószínűsége, hogy 3 független $(0, 1)$ -en választott pont közül pontosan 1-1 essen a $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, és $(\frac{2}{3}, 1)$ intervallumba?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a megfelelő intervallumokba essenek a pontok: $(\frac{1}{3})^3$. Ezt meg kell szorozni a lehetséggel sorrendekkel(permutáció), így $P = 3! \cdot (\frac{1}{3})^3 = \frac{6}{3^3} = \frac{6}{27}$.

11. 0 és 1 között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám?

Megoldás: Tegyük fel, hogy $y > x$. Ekkor $|x - y| = y - x < \min\{x, y\} = x$, ebből $y < 2x$. Hasonlóképp(szimmetriaokokból), ha $x > y$, akkor $y > \frac{1}{2}x$ adódik. Így a keresett valószínűség: $P = \frac{1}{2}$.

b) A két szám három darabra vágja a $[0, 1]$ intervallumot. Mi valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet összerakni?

Megoldás: Nyilván akkor alkot háromszöget, ha teljesülnek a háromszögegyenlőtlenségek. Legyen a két véletlenszám x és y úgy, hogy $x < y$. Ekkor az alábbiaknak kell teljesülnie $x < 1 - x$, $y > \frac{1}{2}$, $y - x < \frac{1}{2}$. Azaz $x < \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{2}$, $y < x + \frac{1}{2}$. Ez egy $1/8$ területű háromszöget alkot. Szimmetriaokok miatt $x > y$ -ra is ugyanez adódik, így $P = \frac{1}{4}$.

12. Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán egy-egy pontot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága kisebb, mint x ($1 \leq x \leq \sqrt{2}$)?

Megoldás: Legyen a két átellenes oldalon felvett véletlen eloszlás értéke x, y ($0 < x, y < 1$). Vegyük a szokásos négyzetes ábrázolási módot. Pitagorasz-tételéből, ha $d = |b - a|$, akkor $d^2 + 1 < x^2$ -nek kell teljesülnie, azaz $d < \sqrt{x^2 - 1}$. Azaz a megfelelő terület az $y > x - d$ és az $y < x + d$ által kimetszett területe a négyzetnek. Ez pedig: $P = T = 1 - (1 - d)^2 = 1 - 1 + 2d - d^2 = 2d - d^2 = 2\sqrt{x^2 - 1} + 1 - x^2$.

Házi feladat

13. Válasszunk k db pontot a $(0,1)$ intervallumon egymástól függetlenül, egyenként egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége, hogy az elhelyezkedésük szerint az l -edik kisebb x -nél?
14. Egy körbe szabályos háromszöget rajzolunk. A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a pont a háromszög belsejébe esik?
15. A $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint választunk egy számot. Mi a valószínűsége, hogy olyan számot választunk, amelynek végtelen decimális kifejtése nem tartalmaz egyes számjegyet?
16. Egy hosszú, magas kerítés egymástól L távolságra leszűrt, D átmérőjű függőleges rudakból áll. Egy d átmérőjű labdát elég messziről, csukott szemmel a kerítés felé dobunk. A labda vagy nekiütődik valamelyik rúdnak, vagy érintés nélkül átrepül közöttük. Mi a valószínűsége annak, hogy a labda a rudak érintése nélkül átrepül a rudak között?
17. Egy ropit két egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott helyen eltörünk. Mi a valószínűsége, hogy a középső darab hosszabb a ropi felénél?
18. *Általános Buffon-féle tűprobléma:* Egy nagy papírlapra d cm-enként párhuzamos vonalakat húzunk, maj egy $2l$ cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű vonalra esik?
19. Egy papírra 4 cm-enként függőleges és vízszintes vonalakat húzunk, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a 2 cm hosszú tű
 - a) legalább 1 vonalra esik?
 - b) pontosan 1 vonalra esik?
20. Egy piros, egy fehér és egy zöld pontot teszünk a $[0, 1]$ intervallumra egymástól függetlenül, külön-külön egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros és a zöld pont közötti távolság legfeljebb $\frac{1}{3}$, és a fehér pont a piros és a zöld közé kerül?
21. *Bertrand-paradoxon:* Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?
 - a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrunkat tekintjük, mely átmérő ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.
 - b) A kör területén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrunkat.
 - c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrunkat, aminek ez a pont a felezőpontja.