

Matematika B4

VIII. gyakorlat

2005.április 7.

1. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Ha az X egy folytonos valószínűségi változó, akkor X -et jól jellemzi az eloszlás illetve a sűrűségfüggvénye. Az eloszlásfüggvény jellemzői:

1. Az eloszlásfüggvény x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x számnál kisebb értéket:

$$F(x) = P(X < x)$$

Egy folytonos eloszlás eloszlásfüggvényére mindig teljesül:

2. a $(-\infty)$ -ben 0-hoz, a ∞ -ban 1-hez tart
3. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$
4. mindenhol folytonos

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x) \geq 0$ minden x -re
2. minden x -re $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ ezért $F'(x) = f(x)$ majdnem olyan x -re, ahol $F(x)$ folytonos.
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

A valószínűségi változó várható értéke:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)dt$$

és tetszőleges $t(X)$ függvényének várható értéke: $E(t(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} t(u)f(u)du$

Feladatok

1. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény: (ahol a függvény nincs megadva, ott automatikusan 0)

a)

$$F(x) = 1 + e^{-x+1} \quad \text{ha} \quad -1 < x$$

b)

$$G(x) = 2 - \frac{2}{x+1} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

c)

$$h(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

d)

$$H(x) = \frac{x}{4}(4-x) \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 2 \quad \text{és} \quad 1 \quad \text{ha} \quad x > 2$$

2. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

a)

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ha} \quad x > 1$$

b)

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2$$

c)

$$h(x) = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{ha} \quad 0 < x < \pi \quad \text{és} \quad 3^{x-1} \ln(3) \quad \text{ha} \quad x \leq 0$$

d)

$$i(x) = 2e^{-2x} \quad \text{ha} \quad x > 0$$

3. Egy tüzéségi lövedék a célterületet egy r sugarú körön belül éri el. A körön bármely területre érkezés valószínűsége arányos az adott terület mérőszámával. Az X valószínűségi változó jelentse a becsapódás pontjának távolságát a célterület középpontjától. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik?
4. Egy l hosszúsági ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbik eloszlásfüggvénye?
5. A $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? És ha 10 pontot választunk, mi a 6. eloszlásfüggvénye?
6. Válasszuk az egységnégyzetben egyenletesen egy pontot. Jelölje X a pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg az X eloszlását! Mi annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint $1/4$?
7. Egy távolsági busz egyenletes eloszlás szerint érkezik a megállóba, munkanapokon 13:00 és 13:15 között, hétvégén 13:00 és 13:10 között. Utazásaim $1/3$ -a hétvégére, $2/3$ -a hétköznapra esik. Mindig 13:00-ra érkezünk a buszmegállóba. Határozzuk meg a buszra várakozás eloszlását. Mi annak a valószínűsége, hogy kevesebb mint 5 percet kell várakoznunk?

8. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1, 1)$ intervallumba esik? *(Az így kapott eloszlás a Cauchy eloszlás)*
9. Egyenletesen választunk egy pontot a egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0.5, 0.5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az Arcussinus-eloszlás)*
10. Egyenletesen választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X -szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$? És ha a pontunkat a $[0, 1]$ -ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? Mi lesz a várható értéke? Milyen x -re lesz $F(x) = 0.5$? *(Azt az x számot, melyre $P(X < x) = 0.5$ az X valószínűségi változó mediánjának nevezzük. Hasonlítsuk össze a várható értékkel!)*
11. Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a következő t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 prcet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?
12. Legyen X^2 egyenletes a $[0, 1]$ -en. Mi lesz X eloszlása? Mi a mediánja, várható értéke?
13. Egy alkatrész napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án (a születésnapomon) hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik alkatrészt érdemesebb megvenni? Azt, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$, ha $x > 1$, vagy ezt? Átlagosan mennyit bír a kétféle minőségű alkatrész?