Matematika B4
VIII. gyakorlat

2005.április 7.

10. Egyenletesen választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$? És ha a pontunkat a $[0, 1]$-ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? Mi lesz a várható értéke? Milyen x-re lesz $F(x) = 0.5$? (Azt az x számot, melyre $P(X < x) = 0.5$ az X valószínűségi változó mediánjánal nevezzük. Hasonlítsuk össze a várható értékkel!)

    Megoldás: $P(X^3 < \frac{1}{2}) = P(X < \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$, *$x^3$ monotonitása miatt. Így a valószínűség* $[-1, 1]$ *esetén:* $P_1 = \frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{2}$.
    $[0, 1]$ *esetén pedig:* $P_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
    Az eloszlásfüggvény: $F(x) = P(X^3 < x) = P(X < \sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{x}$.
    A sűrűsségfüggvény: $f(x) = F'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.
    A várható érték: $m = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = \int_0^1 \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{4}$.
    Mediánja van x_0-ban, ha $F(x_0) = \frac{1}{2}$, *azaz* $\sqrt[3]{x_0} = \frac{1}{2}$, *ebből* $x_0 = \frac{1}{8}$.
    Ebből is látszik, hogy a medián és a várható érték nem feltétlenül egyenlőek

12. Legyen X^2 egyenletes a $[0, 1]$-en. Mi lesz X eloszlása? Mi a mediánja, várható értéke?

    Megoldás: Egyenletes esetén: $P(X^2 < x) = x$, *így* $F(x) = P(X < x) = P(X^2 < x^2) = x^2$. *(Kihasználtuk, hogy a* $[0, 1]$ *intervallumon vagyunk, így a függvény monoton.)*
    Ebből a sűrűsségfüggvény könnyen adódik: $f(x) = F'(x) = 2x$.
    És innen a várható érték: $m = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2xdx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3} \approx 0.667$.
    A medián pedig x_0, *ha* $F(x_0) = \frac{1}{2}$, *azaz* $x_0^2 = \frac{1}{2}$, *amiből* $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$.

13. Egy alkatrész napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án (a születésnapomon) hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik alkatrészt érdemesebb megvenni? Azt, aminek sűrűségfüggvénye $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$, ha $x > 1$, vagy ezt? Átlagosan mennyit bír a kétféle minőségű alkatrész?

    Megoldás: Szerintem február 1. 6 nappal van január 26. után, azaz a keresett valószínűség:
    $P(X > 6) = \int\limits_6^\infty \frac{2}{x^3} = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_6^\infty = \frac{1}{36}$.
    Ennek a várható értéke: $m_1 = \int_1^\infty xf(x)dx = \int_1^\infty x \cdot \frac{2}{x^3}dx = \int_1^\infty \frac{2}{x^2}dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^\infty = 2$.
    A másik várható értéke: $m_2 = \int_1^\infty xf_2(x)dx = \int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x^2}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^\infty = \infty$.
    Így a másodikat érdemes választani.