Matematika B4
IX. gyakorlat

2005. április 14.

1. Exponenciális eloszlás

Egy valószínűségi változó örökifjú tulajdonságú, ha teljesül rá a következő: $\mathbb{P}(X > a + b | X > a) = \mathbb{P}(X > b)$. Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó tárgy "él", a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy "újszölött" tárgynak.
Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.
Megjegyzés
Egy X eloszlásról azt mondhatjuk, hogy öregedik, ha $\mathbb{P}(X > a + b | X > a) < \mathbb{P}(X > b)$ teljesül rá. *Példa*: egy elhasználódó alkatrész élettartama.
Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy fiatalodik, amennyiben $\mathbb{P}(X > a + b | X > a) > \mathbb{P}(X > b)$. *Példa*: a Voronyezsből szökő katona milyen messzire tud eljutni a fronttól.

2. Szórás

Az m várható értékű diszkrét valószínűségi változó szórása: $\sigma = \sqrt{\sum\limits_k (k - m)^2 \cdot p_k}$.

Folytonos esetben: $\sigma = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot f(x) dx}$

3. Normális eloszlás

Tény: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad$ ha $-\infty < x < \infty$,

eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t) dt \quad$ ha $-\infty < x < \infty$.

$X_1 + X_2 + \cdots + X_{12} - 6$ jól közelíti. (X_i a $[0, 1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású valószínűségi változó $i = 1, 2, \ldots 12$)
Az m várható értékű, σ szórású normális eloszlás a standard normálisból származtatható: $F(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$
Független, azonos eloszlású, véges szórású valószínűségi változók összege is normális eloszlást közelít.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az
   $\mathbb{P}(X < x) = F(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha $x \geq 0$
   $\mathbb{P}(Y < y) = G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ ha $y \geq 0$
   eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!

2. Számítsuk ki a λ paraméterű exponenciális eloszlást követő X valószínűségi változó szórását és a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését! Mennyi a medián, az alsó és a felső kvartilis, illetve általában a p-kvantilis értéke (Az F eloszlásfüggvényű eloszlás p-kvantilise az az x, amelyre $F(x) = p$; a medián és a kvartilisek ennek speciális esetei rendre $p = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ értékekkel)?

3. Számítsuk ki az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást követő X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!

4. Számítsuk ki az $f(x) = 2x$ ha $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényt követő X valószínűségi változó megadott valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!

5. Mennyi az előző 3 feladatban a következő valószínűségek értéke (m, σ és d a várható értéket, a szórást illetve az átlagos abszolút eltérést jelöli)?

   a) $\mathbb{P}(m - \sigma < X < m + \sigma)$
   b) $\mathbb{P}(m - d < X < m + d)$
   c) $\mathbb{P}(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$
   d) $\mathbb{P}(m - 2d < X < m + 2d)$

6. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

7. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

8. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

9. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

10. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?

11. Legyen $X_i (i = 1 \ldots 4)$ valószínűségi változó p valószínűséggel 1, $1 - p$ valószínűséggel 0! Legyen $Y_j = \sum_{i=1}^{j} X_i (i = 1 \ldots 4)$! Mennyi $Y_j (j = 1 \ldots 4)$ szórása, illetve második momentuma $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$, illetve általános esetben?

12. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkorábbi időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik?

13. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek?

    a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$

    b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x) dx$

c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \varphi(x) dx$

d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x) dx$

14. Bizonyítsuk be, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) \equiv 1$

15. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!

    a) $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$
    b) $\mathbb{P}(-2 < X < 2)$
    c) $\mathbb{P}(-3 < X < 3)$

16. Számítsuk ki a standard normális eloszlás 0.9 és 0.2-kvantilisét!

17. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm (normális eloszlásnak tekinthető). Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Most mennyi a 0.9 és 0.2-kvantilis?

18. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban

    a) 50 fő alatt
    b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?

19. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?