Matematika B4
IX. gyakorlat

2005. április 14.

1. Exponenciális eloszlás

Egy valószínűségi változó örökifjú tulajdonságú, ha teljesül rá a következő: $\mathbb{P}(X > a + b|X > a) = \mathbb{P}(X > b)$.
Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó tárgy "él", a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy "újszölött" tárgynak.
Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.
Megjegyzés
Egy X eloszlásról azt mondhatjuk, hogy öregedik, ha $\mathbb{P}(X > a + b|X > a) < \mathbb{P}(X > b)$ teljesül rá. ***Példa***: egy elhasználódó alkatrész élettartama.
Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy fiatalodik, amennyiben $\mathbb{P}(X > a + b|X > a) > \mathbb{P}(X > b)$. ***Példa***: a Voronyezsből szökő katona milyen messzire tud eljutni a fronttól.

2. Szórás

Az m várható értékű diszkrét valószínűségi változó szórása: $\sigma = \sqrt{\sum\limits_k (k-m)^2 \cdot p_k}$.

Folytonos esetben: $\sigma = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \cdot f(x)dx}$

3. Normális eloszlás

Tény: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$.

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad$ ha $-\infty < x < \infty$,

eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \quad$ ha $-\infty < x < \infty$.

$X_1 + X_2 + \dots + X_{12} - 6$ jól közelíti. (X_i a $[0, 1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású valószínűségi változó $i = 1, 2, \dots 12$)
Az m várható értékű, σ szórású normális eloszlás a standard normálisból származtatható: $F(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$
Független, azonos eloszlású, véges szórású valószínűségi változók összege is normális eloszlást közelít.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az
   $\mathbb{P}(X < x) = F(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha $x \geq 0$
   $\mathbb{P}(Y < y) = G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ ha $y \geq 0$
   eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!

   Megoldás: Első esetben: $P(X > a + b|X > a) = \frac{e^{-(a+b)^2}}{e^{-a^2}} = e^{-b^2-2ab} < e^{-b^2} = P(X > b)$*, így a definició szerint ez öregedő.*
   Második esetben: $P(X > a + b|X > a) = \frac{e^{-\sqrt{a+b}}}{e^{-\sqrt{a}}} > e^{-\sqrt{b}} = P(X > b)$*, mivel keresztbe szorozva és kihasználva* e^x *szig. monoton növekedését, ez ekvivalens* $-\sqrt{a+b} > -\sqrt{a} - \sqrt{b}$*-vel, ami négyzetreemeléssel könnyen ellenőrizhető. Így a definició szerint ez fiatalodó.*

2. Számítsuk ki a λ paraméterű exponenciális eloszlást követő X valószínűségi változó szórását és a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését! Mennyi a medián, az alsó és a felső kvartilis, illetve általában a p-kvantilis értéke (Az F eloszlásfüggvényű eloszlás p-kvantilise az az x, amelyre $F(x) = p$; a medián és a kvartilisek ennek speciális esetei rendre $p = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ értékekkel)?

   Megoldás: $m = EX = \int xf(x)dx = \int_0^\infty \lambda xe^{-\lambda x}dx = \cdots = \frac{1}{\lambda}$*, egy parciális integrálással.*
   $EX^2 = \int x^2 f(x)dx = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx = \cdots = \frac{2}{\lambda^2}$*, két parciális integrálással (vagy egy parciális integrálással visszavezetjük EX-re) .*
   Így a szórásnégyzet: $\sigma^2 = D^2X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.
   A várható érték $\frac{1}{\lambda}$*, így az átlagos eltérés:* $\int |x-m|f(x)dx = 2\int_0^m (m-x)f(x)dx = 2\int_0^{\frac{1}{\lambda}} (\frac{1}{\lambda} - x)\lambda e^{-\lambda x}dx = \cdots = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{e}$.
   x-ben p-kvantilise van az eloszlásnak, ha F(x)=p, esetünkben $1 - e^{-\lambda x} = p$*, ebből* $x = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{1-p}$.
   Így a mediánja: $\frac{1}{\lambda} \ln 2$.
   Így az alsó kvartilise: $\frac{1}{\lambda} \ln \frac{4}{3}$.
   Így a felső kvartilise: $\frac{1}{\lambda} \ln 4$.

3. Számítsuk ki az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást követő X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!

   Megoldás: $m = EX = \int xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$.
   $EX^2 = \int x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$.
   Így a szórásnégyzet: $\sigma^2 = D^2X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$.
   A várható érték $\frac{a+b}{2}$*, így az átlagos eltérés:* $\int |x-m|f(x)dx = 2\int_a^m (m-x)f(x)dx =$
   $2\int_a^{\frac{a+b}{2}} (\frac{a+b}{2} - x)\frac{1}{b-a}dx = \cdots = \frac{b-a}{4}$.

4. Számítsuk ki az $f(x) = 2x$ ha $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényt követő X valószínűségi változó megadott valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!

   Megoldás: $m = EX = \int xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2xdx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}$.
   $EX^2 = \int x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2xdx = \int_0^1 2x^3dx = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
   Így a szórásnégyzet: $\sigma^2 = D^2X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = frac118$.
   A várható érték $\frac{2}{3}$*, így az átlagos eltérés:* $\int |x-m|f(x)dx = 2\int_0^m (m-x)f(x)dx = 2\int_0^{\frac{2}{3}} (x - \frac{2}{3})2xdx = \cdots = (\frac{2}{3})^4$.

5. Mennyi az előző 3 feladatban a következő valószínűségek értéke (m, σ és d a várható értéket, a szórást illetve az átlagos abszolút eltérést jelöli)?

   a) $\mathbb{P}(m-\sigma < X < m+\sigma)$
   b) $\mathbb{P}(m-d < X < m+d)$
   c) $\mathbb{P}(m-2\sigma < X < m+2\sigma)$
   d) $\mathbb{P}(m-2d < X < m+2d)$

   Megoldás: Erre nekem nincs kapacitásom... HF

6. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

   Megoldás: Az eloszlásfüggvény: $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{3}x}$.
   Annak a valószínűsége, hogy több mint 5 percig kell várnom: $P(X > 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = e^{-\frac{1}{3}5} = e^{-\frac{5}{3}}$.
   Annak a valószínűsége, hogy több mint 7 percig kell várnom, ha már két perce beszél(azaz a beszélgetés hossza nagyobb mint 2): $P(X > 7|X > 2) = \frac{P(X>7)}{P(X>2)} = \frac{1-F(7)}{1-F(2)} = \frac{e^{-\frac{1}{3}7}}{e^{-\frac{1}{3}2}} = e^{-\frac{5}{3}}$.

7. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

   Megoldás: Legyen az exponenciális eloszlás paramétere λ. *Az eloszlásfüggvény:* $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. *A feladat szerint* $F(1000) = 0.02$, *azaz* $1 - e^{-\lambda 1000} = 0.02$, *amiből* $\lambda = \frac{-\ln 0.98}{1000}$.
   A kérdés $P(X > m) =?$
   Kiszámoltuk (2. feladatban), hogy $m = \frac{1}{\lambda}$. *Így* $P(X > m) = 1 - P(X < m) = 1 - F(m) = 1 - F(\frac{1}{\lambda}) = e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = e^{-1}$.

8. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

   Megoldás: Legyen az exponenciális eloszlás paramétere λ. *Az eloszlásfüggvény:* $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. *A feladat szerint* $F(2000) = \frac{1}{3}$, *azaz* $1 - e^{-2000\lambda} = \frac{1}{3}$, *amiből* $\lambda = \frac{-\ln\frac{2}{3}}{2000}$.
   Legyen annak a valószínűsége p, hogy egy adott égő világít 200 óra után. Ekkor $p = P(X > 200) = 1 - F(200) = e^{-200\lambda}$. *Így annak a valószínűsége, hogy 200-ból 150 világít(binomiális):* $\binom{200}{150} p^{150}(1-p)^{50}$.

9. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

   Megoldás:
   $m = EX = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$.
   $EX^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = \frac{91}{6}$.
   $\sigma^2 = D^2X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{91}{6} - (\frac{7}{2})^2 = \frac{35}{12}$.

   Általánosan - "n oldalú kockával":
   $m = EX = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$.
   $EX^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.
   $\sigma^2 = D^2X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (\frac{n+1}{2})^2 = (n+1)\cdot(\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4}) = (n+1)\cdot\frac{4n+2-3n-3}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$.

10. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?

    Megoldás: Ez egy hipergeometrikus eloszlás, így annak a valószínűsége, hogy k piros golyót húzunk ki: $p_k = \frac{\binom{4}{k}\cdot\binom{6}{3-k}}{\binom{10}{3}}$.
    Konkrétan: $p_0 = \frac{1}{6}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{3}{10}$, $p_3 = \frac{1}{30}$.

    Így $m = EX = \sum k \cdot p_k = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{6}{5}$.
    $EX^2 = \sum k^2 \cdot p_k = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{1}{30} = 2$.
    $\sigma^2 = D^2X = EX^2 - (EX)^2 = 2 - (\frac{6}{5})^2 = \frac{14}{25}$.

11. Legyen $X_i (i = 1 \ldots 4)$ valószínűségi változó p valószínűséggel 1, $1-p$ valószínűséggel 0! Legyen $Y_j = \sum\limits_{i=1}^{j} X_i (i = 1 \ldots 4)$! Mennyi $Y_j (j = 1 \ldots 4)$ szórása, illetve második momentuma $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$, illetve általános esetben?

    Megoldás: Erre sincs kapacitásom... HF (nem nehéz csak 12 részfeladatból áll :)

12. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkorábbi időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik?

    Megoldás: Egyenletes eloszlásnál: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ *(lásd 3. feladat).*
    Így $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = 5$ *Amiből* $b - a = 10\sqrt{3}$, *tehát legfeljebb* $10\sqrt{3} \approx 17.3$ *percet késik.*

13. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek?

    a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$

       Megoldás: Ez a standard normális sűrűsségfüggvényének integrálja, így értéke 1.

    b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)dx$

       Megoldás: Ez a standard normális várható értéke, így értéke 0.

    c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \varphi(x)dx$

       Megoldás: Ez a standard normális átlagos abszolút eltérése, értéke $2\int_0^\infty x \cdot \varphi(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

    d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x)dx$

       Megoldás: Ez a standard normális második momentuma, mivel m=0, így $EX^2 = \sigma^2 = 1$.

14. Bizonyítsuk be, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) \equiv 1$

    Megoldás: Tudjuk, hogy $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx$, *valamint* $\Phi(-x) = \int\limits_{-\infty}^{-x} \varphi(x)dx = \int\limits_{x}^{\infty} \varphi(x)dx$ *szimmetriaokokból.*
    Így $\Phi(-x) + \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx + \int\limits_{x}^{\infty} \varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$.

15. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!

    a) $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$

       Megoldás: $\Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0,6826$.

    b) $\mathbb{P}(-2 < X < 2)$

       Megoldás: $\Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0,9544$.

    c) $\mathbb{P}(-3 < X < 3)$

       Megoldás: $\Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1 \approx 0,9974$.

16. Számítsuk ki a standard normális eloszlás 0.9 és 0.2-kvantilisét!

    Megoldás: Táblázatból: 1.28 *illetve* -0.84

17. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm (normális eloszlásnak tekinthető). Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Most mennyi a 0.9 és 0.2-kvantilis?

    Megoldás: A feladat szerint $m = 178$, $\sigma = 9$. *Így* $P(169 < X < 187) = F(187) - F(169) = \Phi(\frac{187-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{169-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{187-178}{9}) - \Phi(\frac{169-178}{9}) = \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.68$.
    $P(X > 200) = 1 - F(200) = 1 - \Phi(\frac{200-m}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{200-178}{9}) = 1 - \Phi(\frac{22}{9}) \approx 0.007$.
    A kvantiliseket vissza kell transzformálni($\sigma \cdot x + m$*):* $x_1 \approx 1,28 \cdot 9 + 178 \approx 189,5$*, illetve*
    $x_2 \approx -0,84 \cdot 9 + 178 \approx 170,4$

18. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban

    a) 50 fő alatt

       Megoldás: A feladat szerint $m = 80$, $\sigma = 20$. *Így* $P(X < 50) = F(50) = \Phi(\frac{50-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{50-80}{20}) = \Phi(-\frac{3}{2}) \approx 0.0668$.

    b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?

       Megoldás: $P(80 < X < 100) = F(100) - F(80) = \Phi(\frac{100-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{80-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{100-80}{20}) - \Phi(\frac{80-80}{20}) = \Phi(1) - \Phi(0) \approx 0.3413$.

19. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?

    Megoldás:
    Egyenletes eloszlásnál:
    Mivel az egyenletes várható értéke 0, így $[-a, a]$ *intervallumon van értelmezve. Ennek szórása* $\sigma = \frac{2a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = 1$. *Ebből* $a = \sqrt{3}$. *És így* $P(X > \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}{2\sqrt{3}} \approx 0,35566$.

    Normális eloszlásnál:
    Standard normálisról van szó, így $P(X > \frac{1}{2}) = 1 - \Phi(\frac{1}{2}) \approx 0,3085$.