A 2. zárthelyi megoldásai

2005. április 25.

Az 1. feladat megoldása

Legyen X valószínűségi változó az alkatrész élettartama.
Mivel X örökifjú tulajdonságú és folytonos értékű, ezért *exponenciális*(λ) eloszlású.(1 pont)
Az exponenciális eloszlás paramétere a várható értékének reciproka, ezért $\lambda = \frac{1}{10}$. (1 pont)

(a) $\mathbf{P}(X > 20) = 1 - \mathbf{P}(X < 20) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{10}20}) = e^{-2}$. (2 pont)
400 égő közül az üzemképesek száma binomiális eloszlású. A binomiális(n, p) eloszlású valószínűségi változók várható értéke np (1 pont)
Így a válasz $n = 400$ és $p = e^{-2}$ esetén, $400e^{-2}$. (1 pont)

(b) $\mathbf{P}(X > 7 \mid X > 2) = \mathbf{P}(X > 5) =$ az örökifjúság miatt, vagy $= \dfrac{\mathbf{P}(X > 7)}{\mathbf{P}(X > 2)} =$ (1 pont)
$= e^{-0,5}$ (2 pont)
Végül, 200 égő közül az üzemképesek száma (szintén binomiális eloszlású), $200e^{-0,5}$ (1 pont)

Az 2. feladat megoldása

1000 megfigyelés átlaga kb. a várható érték, ezt fogjuk mindkét esetben kiszámolni.
Legyen X a szóbanforgó $\mathcal{E}[0,1]$ eloszlású valószínűségi változó. A sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \leq x \leq 1$.

(a) A kérdés $\mathbf{E}(X^2)$ meghatározása:

$$\mathbf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \qquad \text{(5 pont)}$$

(a) A kérdés $\mathbf{E}(|X^2 - 0,25|)$ meghatározása:

$$\mathbf{E}(|X^2 - 0,25|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x^2 - 0,25| f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |x^2 - 0,25|\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{0,5} -(x^2 - 0,25)\,\mathrm{d}x + \int_{0,5}^{1} (x^2 - 0,25)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \qquad \text{(5 pont)}$$

A 3. feladat megoldása

(a) Az eloszlás tartójának helyes ábrázolása (1 pont)
c meghatározása:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x:0}^{1}\int_{y:0}^{x} cxy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = c\frac{1}{15} = 1,$$

azaz $c = 15$. (2 pont)

(b) Az integrálási tartományok helyes ábrázolása (1 pont)

$$\mathbf{P}(Y < 0,25 \,|\, X < 0,5) = \frac{\mathbf{P}(X < 0,5 \; Y < 0,25)}{\mathbf{P}(X < 0,5)} \qquad \text{(1 pont)}$$

$$= \frac{\int\limits_{y:0}^{0,25} \int\limits_{x:y}^{0,5} cxy^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{\int\limits_{y:0}^{0,5} \int\limits_{x:y}^{0,5} cxy^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y} = \frac{17}{160} \qquad \text{(1+1 pont)}$$

(c) Az általános képlet a feltételes sűrűségfüggvénnyel,

$$\mathbf{P}(a < Y < b \,|\, X = x) = \int\limits_a^b f_{2|1}(y \,|\, x) \,\mathrm{d}y \qquad \text{(1 pont)}$$

A feltételes sűrűségfüggvény meghatározása,

$$f_{2|1}(y \,|\, x) = \left. \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \right|_{x=0,5} = \frac{f(0,5\,,\, y)}{\int\limits_0^{0,5} f(0,5\,,\, y) \,\mathrm{d}y} = \frac{0,5y^2}{\int\limits_0^{0,5} 0,5y^2 \,\mathrm{d}y},$$

majd a feltételes valószínűség meghatározása,

$$\mathbf{P}(Y < 0,25 \,|\, X = 0,5) = \int\limits_0^{0,25} \frac{0,5y^2}{\int\limits_0^{0,5} 0,5y^2 \,\mathrm{d}y} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{8} \qquad \text{(2 pont)}$$