

Matematika B4

XIII. gyakorlat

2005. december 7.

1. Folytonos valószínűségi változók transzformációi

$y = a + bx$ egy lineáris transzformáció. Ha $Y = a + bX$ és X sűrűségfüggvénye $f(x)$, eloszlásfüggvénye $F(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, eloszlásfüggvénye $G(Y)$, akkor:

$$G(y) = \begin{cases} F(x) = F\left(\frac{y-a}{b}\right) & \text{ha } b > 0 \\ 1 - F(x) = 1 - F\left(\frac{y-a}{b}\right) & \text{ha } b < 0 \end{cases}$$

$$g(y) = \frac{f\left(\frac{y-a}{b}\right)}{|b|}$$

Ha t függvény monoton növekvő, és t^{-1} folytonosan differenciálható, akkor

$$G(y) = F(t^{-1}(y))$$

$$g(y) = f(t^{-1}(y)) [t^{-1}(y)]'$$

És az általános képlet, ha t monoton növekvő és monoton csökkenő darabokból áll:

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) + \dots + g_i(y)$$

ahol $g_j(y)$ a t függvény j . darabjából adódó sűrűségfüggvény.

Ha X tetszőleges valószínűségi változó, $F(x)$ az eloszlásfüggvénye, akkor $F^{-1}(RND)$ Y -nal megegyező eloszlású.

Feladatok:

- Vegyük azt az X folytonos eloszlást, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ ha $x \in [0, 1]$, egyébként 0.
 - Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?
 - Lineáris transzformáció segítségével standardizáljuk X eloszlását, azaz találunk egy olyan $t(x) = a + bx$ függvényt, hogy $t(X) = a + bX$ valószínűségi változó 0 várható értékű, és 1 szórású legyen.
- RND egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon. Keressünk alkalmas t függvényt, hogy $Y = t(RND)$
 - 2 paraméterű exponenciális eloszlású legyen.
 - $x \in [10, 30]$ -on egyenletes eloszlású legyen.
- A zsebszámológép RND gombja és egy transzformáció segítségével generáljunk három *CAUCHY* eloszlású pontot. (Segítségül a *CAUCHY* eloszlás eloszlásfüggvénye: $\frac{1}{2} + \frac{\text{ArcTan}(x)}{\pi}$)

4. Egy villanykörte-gyár λ paraméterű exponenciális eloszlás szerint kiégő villanykörtét gyárt. A konkurens cég is tud λ paraméterű exponenciális szerint kiégőt gyártani, ezért hosszú kutatás után bevezetnek egy új eljárást, amely segítségével megháromszorozták az izzók élettartalmát. Milyen lett így az új izzók élettartalmának eloszlása?
5. Legyen X egyenletes eloszlású az $[5, 8]$ intervallumon.
- Számoljuk ki $|X - 6|$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!
 - Számoljuk ki X^2 eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!
6. Vegyünk egy két dimenziós (X, Y) eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 4xy$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!