Matematika B4
XIII. gyakorlat

2005. december 7.

1. Folytonos valószínűségi változók transzformációi

$y = a + bx$ egy lineáris transzformáció. Ha $Y = a + bX$ és X sűrűségfüggvénye $f(x)$, eloszlásfüggvénye $F(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, eloszlásfüggvénye $G(Y)$, akkor:

$$G(y) = \left\{ \begin{array}{cc} F(x) = F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b > 0 \\ 1 - F(x) = 1 - F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b < 0 \end{array} \right\}$$

$$g(y) = \frac{f(\frac{y-a}{b})}{|b|}$$

Ha t függvény monoton növekvő, és t^{-1} folytonosan differenciálható, akkor

$$G(y) = F(t^{-1}(y))$$

$$g(y) = f(t^{-1}(y)) \left[t^{-1}(y)\right]'$$

És az általános képlet, ha t monoton növő és monoton csökkenő darabokból áll:

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) + \cdots + g_i(y)$$

ahol $g_j(y)$ a t függvény j. darabjából adódó sűrűségfüggvény.

Ha X tetszőleges valószínűségi változó, $F(x)$ az eloszlásfüggvénye, akkor $F^{-1}(RND)$ Y-nal megegyező eloszlású.

Feladatok:

1. Vegyük azt az X folytonos eloszlást, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ ha $x \in [0, 1]$, egyébként 0.

   a) Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?

   Megoldás: A képlet alapján: $g(y) = \frac{1}{5} \cdot f(\frac{y-3}{5}) = \frac{2}{5}\frac{y-3}{5}$.

   b) Lineáris transzformáció segítségével standardizáljuk X eloszlását, azaz találjunk egy olyan $t(x) = a + bx$ függvényt, hogy $t(X) = a + bX$ valószínűségi változó 0 várható értékű, és 1 szórású legyen.

   Megoldás:

   $$EX = \int_0^1 x \cdot f(x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

   $$EX^2 = \int_0^1 x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}.$$

Így $D^2X = EX^2 - E^2X = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}$. *És a szórás:* $DX = \frac{1}{\sqrt{18}}$
Ekkor $a = -\frac{2}{3}$, *kell hogy legyen, mivel ekkor* $E(t(X)) = 0$. *És* $b = \sqrt{18}$, *hogy a szórás pedig 1 legyen.*

2. RND egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon. Keressünk alkalmas t függvényt, hogy $Y = t(RND)$

   a) 2 paraméterű exponenciális eloszlású legyen.

   Megoldás: Az utolsó megjegyzés szerint F(x) inverze lesz a jó függvény. Azaz $x = 1 - e^{-\lambda y}$*-ből kell kifejeznünk y-t. Ezt elvégezve* $t(x) = -\frac{ln(1-x)}{\lambda}$ *adódik.*

   b) $x \in [10,30]$-on egyenletes eloszlású legyen.

   Megoldás: Könnyen átgondolható, hogy t(x)=20x+10 megfelelő.

3. A zsebszámológép RND gombja és egy transzformáció segítségével generáljunk három $CAUCHY$ eloszlású pontot. (Segítségül a $CAUCHY$ eloszlás eloszlásfüggvénye: $\frac{1}{2} + \frac{ArcTan(x)}{\pi}$)

   Megoldás: Szintén F(x) inverzét kell kiszámolni, hogy egy Cauchy-eloszlásba transzformáljunk.
   $x = \frac{1}{2} + \frac{ArcTan(y)}{\pi}$*-ből:* $y = t(x) = Tan(\pi \cdot (x - \frac{1}{2}))$.

4. Egy villanykörte-gyár λ paraméterű exponenciális eloszlás szerint kiégő villanykörtét gyárt. A konkurens cég is tud λ paraméterű exponenciális szerint kiégőt gyártani, ezért hosszú kutatás után bevezetnek egy új eljárást, amely segítségével megháromszorozták az izzók élettartalmát. Milyen lett így az új izzók élettartalmának eloszlása?

   Megoldás: Legyen X *egy* λ *paraméterű exponenciális eloszlás, kérdés mi ekkor 3X eloszlása?*
   Képlet szerint: $G(y) = F(y/3) = 1 - e^{-\lambda \frac{y}{3}} = 1 - e^{-\frac{\lambda}{3} y}$, *azaz pontosan* $\frac{\lambda}{3}$ *paraméterű exponenciális eloszlás lesz.*

5. Legyen X egyenletes eloszlású az $[5,8]$ intervallumon.

   a) Számoljuk ki $|X-6|$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

   Megoldás: Legyen $Y = |X-6|$, *ekkor Y eloszlásfüggvénye:*

   $$G(y) = P(Y < y) = P(|X-6| < y) = 2 \cdot \frac{y}{3} \quad , ha \quad y < 1$$

   $$G(y) = P(Y < y) = P(|X-6| < y) = \frac{1}{3} + \frac{y}{3} \quad , ha \quad 1 < y < 2$$

   És a sűrűségfüggvény ennek megfelelően: $g(y) = \frac{2}{3}$, *ha y<1, és* $g(y) = \frac{1}{3}$, *ha 1<y<2.*

   b) Számoljuk ki X^2 eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

   Megoldás: Itt $t(x) = x^2$ *invertálható, így ez csak egy képletbe helyettesítés:*

   $$G(y) = F(t^{-1}(y)) = F(\sqrt{y}) = \frac{\sqrt{y} - 5}{3} \quad , illetve$$

   $$g(y) = f(t^{-1}(y)) \cdot \left[t^{-1}(y)\right]' = f(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{6\sqrt{y}}.$$

6. Vegyünk egy két dimenziós (X,Y) eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = 4xy$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

   Megoldás: $P(X \cdot Y < a)$ *kell. Nézzük meg melyek azok a pontpárok, melyek a feltételt kielégítik: Nyílván* *ekkor (x, y) beleesik a (0,1) négyzetbe, ráadásul teljesül az $xy < a$ egyenlőtlenség, azaz $y < a/x$. Ha ezen a területen kiintegráljuk $f(x, y)$-t akkor megkapjuk a keresett valószínűséget. (Gyakorlatilag könnyebb azonban a komplementer valószínűségét kiszámolni):*

$$F(a) = P(XY < a) = 1 - P(XY > a) = 1 - \int_{x=a}^{1} \int_{y=\frac{a}{x}}^{1} f(x,y)dydx = 1 - \int_{x=a}^{1} \int_{y=\frac{a}{x}}^{1} 4xydydx = 1 - \int_{x=a}^{1} 2x - \frac{2a^2}{x} dx = a^2 - 2a^2 lna$$

És így $f(a) = F'(a) = -4alna$.

Másik esetben: $P(Y/X < a)$ értékét kell kiszámolni. Amiből $y < ax$-nek kell teljesülnie.

$$G(a) = P(\frac{Y}{X} < a) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{ax} f(x,y)dydx = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{ax} 4xydydx = \int_{x=0}^{1} 2a^2x^3dx = \frac{a^2}{2} \quad , ha \quad a < 1$$

$$G(a) = P(\frac{Y}{X} < a) = \int_{y=0}^{1} \int_{x=\frac{y}{a}}^{1} f(x,y)dxdy = \int_{y=0}^{1} \int_{x=\frac{y}{a}}^{1} 4xydxdy = \int_{y=0}^{1} 2y - 2\frac{y^3}{a^2}dy = 1 - \frac{1}{2a^2} \quad , ha \quad a > 1$$

És így $g(a) = G'(a) = a$, ha a<1, és $g(a) = \frac{1}{a^3}$, ha a>1.