Matematika B4
I. gyakorlat

2005. szeptember 14.

1. Bevezető kérdések

1. Négyszer dobunk érmével és megfigyeljük mindegyik érmén, hogy melyik oldal val felül. Írjuk fel az eseményteret!

   Megoldás: {IIII,IIIF,IIFI,IFII,FIII,IIFF,IFIF,FIIF,IFFI,FIFI,FFII,IFFF,FIFF,FFIF,FFFI,FFFF}

2. Addig dobunk érmével, amíg másodszorra fejet nem kapunk. Írjuk fel az eseményteret!

   Megoldás: {FF,FIF,FIIF,FIIIF,FIIIIF,...
   IFF,IFIF,IFIIF,IFIIIF,IFIIIIF,...
   IIFF,IIFIF,IIFIIF,IIFIIIF,IIFIIIIF...
   ... }

3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy piros és egy zöld kockával két 2-est dobok? És ugyanez két zölddel?

   Megoldás: $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ *mindkét esetben.*

4. Mi a valószínűsége annak, hogy 10 dobásból legalább egy 6-os?

   Megoldás: Komplementer módszerrel oldjuk meg, azaz 1-ből kivonjuk annak a valószínűségét, hogy egyik se 6-os. Így $P = 1 - (\frac{5}{6})^{10}$

2. Kombinatórikus leszámolások

	ismétlés nélküli	ismétléses
permutáció	$n!$ n futó beérkezésének sorrendje	$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$ n golyót ennyi féle képpen állíthatunk sorba, ha $k_1, k_2, \ldots k_r$ db külön-külön egyszínű
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$ n futó beérkezésének sorrendje ha csak az első k helyet tekintjük	l^k l darab betűből készíthető k hosszú szavak száma
kombináció	$\binom{n}{k}$ n golyóból kiválasztunk k darabot és nem számít a kiválasztás sorrendje	$\binom{k+l-1}{l}$ k darab sütiből (sok van belőlük) hazaviszünk l-et, ennyi féleképpen tehetjük meg

5. A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

   Megoldás: Az első mind a 7 törpe lehet, a második a többi hat közül lehet,... Így a lehetséges sorrendek száma: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$

6. Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi?

   Megoldás: Az előző feladat szerint 10 betűt $10!$*-féleképp lehet sorbarakni, de 3 A, 2 M és 2 T van, melyeket nem kell megkülönböztetni egymástól:* $\frac{10!}{3!2!2!} = 151200$.

7. Egy versenyen 5-en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.)

   Megoldás: Az első lehet 5 féle, a második 4, a harmadik 3. Így: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

8. Egy fagyizóban 5 féle fagylalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet 1 fajtából többet is venni?

   Megoldás: Az első gombóc lehet mind az 5 féle, a második szintén. Így: $5 \cdot 5 = 25$.

9. Van 6 lányismerősöm, és 2-t el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?

   Megoldás: Az első lehet 6 féle, a második már csak 5, de mivel a sorrend nem számít, minden esetet kétszer számoltunk. Így: $\frac{6 \cdot 5}{2} = \binom{6}{2} = 15$.

10. 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár és 3 titkárnő jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói?

    Megoldás: 6 tanár közül 3-t, a 3 titkárnő közül 1-t kell kiválasztani. Így: $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} = 60$.

11. Egy számkombinációs zárat 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?

    Megoldás: 10 szám közül 3-t kell kiválasztani, ez a sorrendet már meghatározza, hiszen növekedő sorrendben kell. Így: $\binom{10}{3} = 120$.

Házi feladatok:

12. Rendezgetem a gémkapocsgyűjteményemet. Van egy barna, egy szürke, és egy fehér. Hányféleképpen rakhatom őket sorba? És ha 7 különböző lenne?

    Megoldás: IN Permutáció: $3! = 6$ *ill.* $7! = 5040$

13. Egy érmét tízszer feldobunk egymás után. Hányféle dobássorozat van, amelyben 6 fej és 4 írás fordul elő?

    Megoldás: I Permutáció: $\frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$.

14. Piros, sárga, zöld, és kék szinekből hányféleképpen lehet háromsávos (vízszintes sráfozású) zászlót készíteni, ha minden színt legfeljebb egyszer használhatunk?

    Megoldás: IN Variáció: $\frac{4!}{(4-3)!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

15. Hány különböző autórendszám készíthető (három betűből és három számjegyből)? (26 különböző betűt használnak a rendszám készítéshez.)

    Megoldás: I Variáció: $26^3 \cdot 10^3 = 17576000$.

16. Hány ötöslottó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatosunk? És hatoslottó szelvényt?

    Megoldás: IN Kombináció: $\binom{90}{5} = 43949268$ *ill.* $\binom{45}{6} = 8145060$.

3. Valószínűség

Elvégzünk egy kísérletet, például feldobunk egy kockát, amelynek lehetséges eredményeit (adott esetben 1, 2, 3, 4, 5, 6 eseteket) kimeneteknek nevezzük. A kimenetek összességét eseménytérnek nevezzük. A kimeneteket mi választjuk meg, megtehetjük azt is, hogy azt a két lehetőséget nézünk, hogy hatost dobtunk-e, vagy sem.
Az egyes kimenetekhez valószínűséget rendelhetünk. Ha a kimenetelek egyformán valószínűnek tekinthetők, akkor egy adott kimenenet valószínűsége legyen:

$$\textit{valószínűség} = \frac{\textit{kedvező kimenetelek száma}}{\textit{az összes kimenetel száma}}$$

Biztos esemény 1 valószínűségű (pl. a kocka dobásánál mekkora valószínűséggel dobunk pozitív számot), ez "mindig" bekövetkezik.
Lehetetlen esemény valószínűsége: 0.

17. Feldobunk egy érmét kétszer egymásután. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy pontosan 1 db fejet dobunk?

    Megoldás: Az eseménytér: { II, IF, FI, FF}. Innen $P = \frac{3}{4}$ *ill.* $P = \frac{2}{4}$.

18. Egy csomag magyar kártyából kiveszünk egy lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Megkeverjük a paklit, majd megint választunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két lap színe különböző?

    Megoldás: 32 lap van összesen, 24 lap lesz különböző színű bármilyet is húzunk elsőre. Így $P = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$.

19. Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?

    Megoldás: Vagy leszámlálással, vagy komplementer módszerrel. Így $P = 1 - (\frac{5}{6})^2 = \frac{11}{36}$ *ill.* $P = (\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{36}$.

20. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$?

    Megoldás: Az eseménytér: { FFF, FFL, FLF, LFF, FLL, LFL, LLF, LLL}. Így: $P = \frac{2}{8}$.

21. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?

    Megoldás: Komplementer képzéssel, ha n-szer dobunk a legalább 1 fej valószínűsége: $P = 1 - (\frac{1}{2})^n > 0.9$ *a feltétel szerint. Ezt megoldva* $n \geq 4$.

22. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek?

    Megoldás: Összes eset legyen összes permutáció=7!. Jó eset: a trilógia kötetetei lehetnek 1-3,2-4,3-5,4-6,5-7 helyeken. Ez 5 eset. Ám a trilógia könyvei tetszőleges sorrenden lehetnek ezen belül (3!), csakúgy mint a többi könyv (4!). Így: $P = \frac{5 \cdot 3! \cdot 4!}{7!} = \frac{1}{7}$.

23. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?

    Megoldás: Összes eset: 6^6. *Jó eset: 6!. Így* $P = \frac{6!}{6^6}$.

24. A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik?

    Megoldás: Rögzitsük, hogy Ronaldo melyik csapatba kerül. Ekkor összes eet: $\binom{21}{10}$*-féleképp lehet feltölteni a csapatát. Jó eset:*$\binom{20}{10}$*-féleképp lehet feltölteni a csapatát Ronaldinho nélkül. Így:* $P = \frac{\binom{20}{10}}{\binom{21}{10}} = \frac{11}{21}$.

25. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 23 fős társaságban van legalább két olyan ember, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik (tegyük fel, hogy az emberek az év 365 napján egyforma eséllyel születnek)?

    Megoldás: Komplementer módszerrel: $P = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 344}{365^{23}} \approx 0.5073$.