Matematika B4
II. gyakorlat

2005. február 24.

1. Bevezető kérdések

1. Feldobunk egy kockát és egy érmét. Ábrázoljuk az eseményteret! Legyenek adottak az alábbi események: 3-ast dobunk, 4-est dobunk, fejet dobunk, írást dobunk. Ezek közül melyek alkotnak: független párt? diszjunkt párt? teljes eseményrendszert?

   Megoldás: Az eseménytér:

F 1	*F 2*	*F 3*	*F 4*	*F 5*	*F 6*
I 1	*I 2*	*I 3*	*I 4*	*I 5*	*I 6*

   Független pár: 3 - F, 4 - F, 3 - I, 4 - I
   Diszjunkt pár: 3 - 4, F - I
   Teljes eseményrendszer: I - F

2. Egy szabályos kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy 6-ost dobunk, ha tudjuk, hogy: párosat dobunk? legalább 3-ast dobunk? legfeljebb 5-öst dobunk?

   Megoldás: $P_1 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, $P_2 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{4}$ *ill.* $P_3 = 0$

2. Szita-formula

Az $A_1, A_2, \dots A_n$ események közül legalább egy bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cdot A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)$$

Például $n = 2$-re: $P(A \text{ vagy } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ és } B)$.

3. Hány olyan egész szám van 1 és 1000 között amely osztható 2-vel, 3-mal, vagy 5-tel?

   Megoldás: A_1 *legyen a 2-vel,* A_2 *a 3-mal,* A_3 *az 5-tel osztható számok halmaza.*
   Ekkor $P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{3}, P(A_3) = \frac{1}{5}, P(A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{6}, P(A_1 \cdot A_3) = \frac{1}{10}, P(A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{15}, P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{30}$.
   S így szita-formulából annak a valószínűsége, hogy egy szám osztható 2-vel,3-mal, vagy 5-tel:

   $$P(A_1+A_2+A_3) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cdot A_j) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{11}{15}$$

   Esetünkben konkrétan $[\frac{1000}{2}] + [\frac{1000}{3}] + [\frac{1000}{5}] - [\frac{1000}{6}] - [\frac{1000}{10}] - [\frac{1000}{15}] + [\frac{1000}{30}]$ *értékét kell kiszámolni.*

3. Feltételes valószínűség

Vizsgálhatjuk egy (A) esemény bekövetkezésének valószínűségét úgy is, ha tudjuk, hogy egy másik (B) esemény bekövetkezett. Például ha a lottón az első 4 szám talált, és még most húzzák az ötödik nyerőszámot, akkor nagyobb a telitalálat valószínűsége, mint a sorsolás megkezdése előtt. A fenti jelölésnél $P(A|B)$ a feltételes valószínűség. (Olvasva: A valószínűsége feltéve B-t.) Számítása:

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ és } B)}{P(B)}$$

4. Feldobunk 2 kockát. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6? És ha nem tudunk semmit?

   Megoldás: Az eseménytér:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
5	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

   Ebből már kiolvashatóak a válaszok: $P_1 = \frac{2}{5} = 0.4$ *ill.* $P_2 = \frac{11}{36} \approx 0.306$.

5. Tegyük fel, hogy azonos eséllyel szülnek az anyák lányt illetve fiút. A kétgyerekes családokat vizsgálva, mennyi annak a valószínűsége, hogy két fiú van, ha tudjuk, hogy van fiú? És mennyi az esélye, hogy van lány is, ha tudjuk, hogy van egy fiú?

   Megoldás: Az eseménytér: {F F, F L, L F, L L}. Így $P_1 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$ *ill.* $P_2 = 1 - P_1 = \frac{2}{3}$.

4. Szorzási szabály

Feltételes valószínűségek szorzási szabálya:

$$P(A_n \cdot A_{n-1} \cdot \ldots A_1) = P(A_n|A_{n-1} \cdot \ldots A_2 \cdot A_1)P(A_{n-1}|A_{n-2} \cdot \ldots A_2 \cdot A_1) \ldots P(A_3|A_2 \cdot A_1)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

6. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet húzunk, ha húzás után a golyókat

   a) Visszatesszük

      Megoldás: $P = \frac{3}{14} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{14}$.

   b) Nem tesszük vissza?

      Megoldás: $P = \frac{3}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{6}{12}$.

7. Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így a másodszorra már csak a 40%, harmadszorra pedig csak a 20%-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány

   a) Átvészeli a teljes eljárást?

      Megoldás: $P = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,192$.

   b) Az utolsó irtáskor pusztul el?

      Megoldás: $P = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,2 = 0,048$.

c) Túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?

Megoldás: $P = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$.

8. Egy dobozban 16 tranzisztor közül 3 hibás. Mi a valószínűsége, hogy három egymás után kivett tranzisztor működőképes?

   Megoldás: $P = \frac{13}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14}$.

5. Teljes valószínűség tétele

Ha $H_1, H_2, \dots H_n$ teljes eseményrendszert alkot (azaz páronként diszjunktak és együtt kiadják a biztos eseményt), A pedig tetszőleges esemény, akkor:

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n).$$

9. Egy suli tanulóinak 80%-a lány. Az első matekvizsgán általában a nők 15%-át, a fiúk 10%-át húzzák meg. A hallgatóságnak hány %-a bukik meg az első vizsgán?

   Megoldás: $P = 0,8 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,14 = 14\%$.

10. Információink szerint az A céggel kötött üzleteink 60%-a, a B céggel kötött üzletek 70%-a bizonyul kedvezőnek. Kettőjük közül a hamarabb jelentkező céggel rögtön két üzletet is kötünk. Mi a valószínűsége, hogy

    a) Az első üzletkötés kedvező lesz?

    Megoldás: $P = 0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,7 = 0,65$.

    b) Mindkét üzletkötés javunkra válik?

    Megoldás: $P = 0,5 \cdot 0,6^2 + 0,5 \cdot 0,7^2 = 0,65$.

    c) Lesz köztük rossz és jó üzlet is?

    Megoldás: A jó üzlet lehet az első és a második is, így van egy kétszeres szorzó:
    $P = 2 \cdot (0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3)$.

11. Iszákos Iván a nap 2/3 részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az 5.-ben ott lesz?

    Megoldás: "jó/összes esettel:" $P = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{2}{7}$.

6. Bayes tétel

Ha A már bekövetkezett, mi annak a valószínűsége, hogy ez pontosan az H_i eseménnyel együtt valósult meg? A definició szerinti képletet felírva, a számlálóba a feltételes valószínűség, a nevezőbe a teljes valószínűség képletét alkalmazva adódik a képlet, hogy:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A \text{ és } H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n)}$$

12. A ketyere gyárban az A, B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B-n 35, a C-n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C-n gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy

ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A, B, illetve a C gépsoron gyártották?

Megoldás: $P_A = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02} \approx 36\%$, $P_B = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}04}{0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02} \approx 41\%$, *ill.* $P_C = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}02}{0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02} \approx 23\%$.

13. Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az Athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak gőze sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, és egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi 2*2, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

   Megoldás: $P_A = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{2}{11}$.

14. Az igazak városában az emberek 90%-a igazat mond, a hazugok városában az emberek 85%-a hazudik. Mivel lefüggönyözött busszal hoztak ide minket, nem tudjuk melyikben vagyunk. Megkérdezünk egy embert, hogy "Ez a hazugok városa?"

   a) Mi a valószínűsége, hogy igazat mond?

      Megoldás: Két eset lehetséges. Lehetünk a hazugok városában, és lehetünk az igazmondók városában. Így: $P = \frac{1}{2} \cdot 0,9 + \frac{1}{2} \cdot 0,15 = 0,525$.

   b) Mi a valószínűsége, hogy igennel válaszol?

      Megoldás: Ha azt mondja, hogy "Igen", akkor két eset lehetséges. Lehet a hazugok városában igazmondó (15%), és lehet az igazmondók városában hazug (10%). Így: $P = \frac{1}{2} \cdot 0,15 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 = 0,125$.

   c) Mi a valószínűsége, hogy igazat mond feltéve, hogy igennel válaszol?

      Megoldás: Ha azt mondja, hogy "Igen", akkor két eset lehetséges. Lehet a hazugok városában igazmondó (15%), és lehet az igazmondók városában hazug (10%). Ezek közül az elöbbi a megfelelő. Így: $P = \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}1} = \frac{3}{5}$.

7. Házi feladatok

15. Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges	Összesen	Esemény
Fiú	50	60	110	B1
Lány	40	80	120	B2
Tanár	10	20	30	B3
Összesen	100	160	260	
Esemény	A1	A2		

   a) Véletlenszerűen kihúzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy:

      i) fiúé?

         Megoldás: $P = \frac{110}{260}$.

      ii) betegé?

         Megoldás: $P = \frac{100}{260}$.

iii) Beteg fiúé?

Megoldás: $P = \frac{50}{260}$.

b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?

Megoldás: $P = \frac{40}{120}$.

c) Az orvos szorgos asszistense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?

Megoldás: $P = \frac{10}{100}$.

d) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?

Megoldás: $P_{FL} = \frac{50}{100} \cdot \frac{40}{99}$ *ill.* $P_{FF} = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99}$.

16. Egy valószínűségszámítás vizsgán 30 tétel van ezek közül 6 a nevezetes eloszlásokkal kapcsolatos. Az első két szóbeliző hallgató kihúz egy-egy tételt. Mi annak a valószínűsége, hogy

a) Csak az első hallgató húz nevezetes eloszlásos tételt?

Megoldás: $P = \frac{6}{30} \cdot \frac{24}{30}$.

b) Mindkét hallgató ilyen tételt húz (húzhatják mindketten ugyanazt is!)

Megoldás: $P = \frac{6}{30} \cdot \frac{6}{30}$.

c) Egyik sem húz ilyen tételt?

Megoldás: $P = \frac{24}{30} \cdot \frac{24}{30}$.

17. Egy P kockának 4 piros és 2 fehér, egy Q kockának 2 piros és 4 fehér lapja van. Feldobunk egy érmét. Ha a dobás fej a P-vel, ha írás, akkor Q-val dobunk.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy a dobás piros lesz?

Megoldás: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{2}$.

b) És ha tudjuk, hogy fejet dobunk?

Megoldás: $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

c) Mi annak a valószínűsége, hogy a k. dobás piros lesz?

Megoldás: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{2}$.

d) És ha tudjuk, hogy az előző k-1 dobás mind piros volt?

Megoldás: $P = \frac{\frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{k-1} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3})^{k-1}}{(\frac{2}{3})^{k-1} + (\frac{1}{3})^{k-1}} = \frac{2^k+1}{3(2^{k-1}+1)}$.

e) Tudjuk, hogy az eredmény piros. Mi a valószínűsége, hogy P kockával dobtunk?

Megoldás: $P = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{2}{6} + \frac{4}{6}} = \frac{2}{3}$.

18. Egy bináris csatornán a 0 jelet 1/3, az 1 jelet 2/3 valószínűséggel adják le. Mivel az adást az ellenséges politikai erők zavarják, ha 0-t adnak le, akkor 1/4 valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1-et adnak le, 1/5 valószínűséggel 0 érkezik.

a) Kaptunk egy 0-t. Mi az esélye, hogy ezt 0-ként is adták le?

Megoldás: $P = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{15}{23}$.

b) Mi a valószínűsége, hogy 1-et kapunk?

Megoldás: $P = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{37}{60}$.