

Matematika B4

III. gyakorlat

2005. szeptember 28.

1. Bevezető kérdések

1. Egy piros és egy kék dobókockával dobunk. Tekintsük az alábbi 3 eseményt: a piros kockával párosat dobunk, a kék kockával párosat dobunk, a dobott összeg páros. Függetlenek-e ezek az események?
2. a) Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?
b) És ha két kockával dobunk, egy pirossal és egy késsel, mennyi az összeg várható értéke?
c) És a két dobott szám különbségének várható értéke (piros kockával dobott számból kivonjuk a kék kockával dobott számot)?
d) És a két dobott szám eltérésének várható értéke (nagyobbik számból kivonjuk a kisebbet)?

2. Független események

A és B esemény függetlenek, ha teljesül, hogy $P(AB) = P(A)P(B)$. Több esemény akkor független, ha nem csak az teljesül, hogy

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n)$$

hanem tetszőleges A_i -k helyett mindkét oldalon azok komplementerét véve is igaz az egyenlőség, például a következő esetben:

$$P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \overline{A_4} \dots A_n) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) \dots P(A_n)$$

Ilyen egyenletből 2^n darab van.

Feladatok:

3. Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B az az esemény, hogy másodikra dobunk fejet, C pedig, hogy a dobások egyezők. Bizonyítsa be, hogy $\{A, B, C\}$ eseményrendszer bár páronként független eseményekből áll, teljesen nem független!
4. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Az alábbi betűkkel jelöljük a következő eseményeket: $A = \{ \text{a dobott számok összege } 7 \}$, $B = \{ \text{legalább az egyik kockán van hatos} \}$, $C = \{ \text{mindkét kockával páratlant dobok} \}$, $D = \{ \text{a két kockával különböző számokat dobok} \}$, $E = \{ \text{a zöld kockával 4-est dobok} \}$.
Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:
 - a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?
 - b) Kizáróak-e az A és C események?
 - c) Mennyi a B esemény valószínűsége? És mennyi a B valószínűsége, feltéve, hogy A bekövetkezett?
 - d) Hogy viszonyul egymáshoz A és D ? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?

- e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?
- f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek
 - i. függetlenek, de nem kizáróak,
 - ii. kizáróak, de nem függetlenek.

3. Hipergeometrikus eloszlás

A piros, és B fehér golyó közül húzunk n darabot. Annak a valószínűsége, hogy pontosan k db piros golyót húzzunk ki:

$$P(X = k) = h_{A,B,n}(k) = \frac{\binom{A}{k} \binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$$

Például: A 2 találat valószínűsége az ötös lottón: $P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$

5. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot, egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X . $P(X = 7) = ?$
6. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza ebből 30 fehér. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vendég kap neki megfelelő itókát?
7. A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, minden színből 5. Kiosztok 5-5 lapot. Mi a valószínűsége, hogy az ellenfélnek van zöldje, ha nekem 3 zöldem és két pirosam van? És ha nem tudom milyen lapjaim vannak (még nem néztem meg)?

4. Binomiális eloszlás

Tipikus példa egy pénzdobás sorozatban a fejek száma. Ha n -szer dobtunk fel egy érmét, amely p valószínűséggel fej, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k db fej van a dobások között:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Például: Pontosan 3 hatost dobunk 20 dobásból: $P(X = 3) = \binom{20}{3} (1/6)^3 (5/6)^{17}$

8. Pisti nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 darab eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsi dereng, ezért kicsit több, mint 50%-os, mondjuk olyan 60%-os valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Milyen valószínűséggel megy át, ha a ketteshez 8 jó válasz kell?
9. Egy roszomák elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél $1/2$ valószínűséggel jobbra, $1/2$ valószínűséggel balra lép. 20 lépés megtétele után
 - a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?
 - b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?
 - c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti lépés után a (-3)-ban volt?
10. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?
11. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme $3/4$ valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, $1/2$ eséllyel az igazságosat, $1/2$ eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

5. Várható érték I.

Ha X eloszlása: $P(X = x_i) = p_i$, akkor X várható értéke:

$$\sum_i x_i p_i, \text{ feltéve ha } \sum_i |x_i| p_i < \infty$$

$t(X)$ várható értéke:

$$\sum_i t(x_i) p_i, \text{ feltéve ha } \sum_i |t(x_i)| p_i < \infty$$

12. A diszkrét X eloszlás tagjai: $p(x) = \frac{x^2}{30}$ ($x=1,2,3,4$). Mennyi az eloszlás várható értéke?
13. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzen meg?
14. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára hosszú távon?
15. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, mekkora, egy szelvénnel fogadva, nyereségünk várható értéke?
16. Egy dobozban 2 piros és 2 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk az első pirosig, és jelöljük X -szel a húzások számát. Számoljuk ki: X , X^2 , 2^X , $\frac{1}{2^X}$ várható értékét!

6. Házi feladatok

17. Háromszor dobunk fel egy pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások száma között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb 1 írás fordul elő. Függetlenek-e a fenti események egymástól?
18. A vidámparkban a céllövöldében játszom. Egymás után vonulnak fel a célpontok, mindegyiket egymástól függetlenül $2/3$ valószínűséggel eltalálom. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 célzásból pontosan 4-et találok el? Mennyi a valószínűsége, hogy 2-nél többet találok el, de azért nem az összeset?
19. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?
20. Egy gyárban az I. gépsor az idő 60%-ában a II. gépsor az idő 70%-ában dolgozik egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége hogy a) mindkét gép dolgozik, b) legalább az egyik dolgozik, c) csak az egyik gép dolgozik d) mindkét gép áll?
21. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme $3/4$ valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, $1/2$ eséllyel az igazságosat, $1/2$ eséllyel a cinkeltet, és odaadom Nektek. 30 dobás után el kell döntenetek, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznátok meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej az a maximális, amikor még az igazságos érmére tippelnétek?)
22. Mi a valószínűsége, hogy 0,1,2,3,4,5 találatom lesz a LOTTÓ-n?
23. Mi a valószínűsége, hogy 11,12,13,13+1 találatom lesz a TOTÓ-n ha felteszem hogy minden választ $1/3$ valószínűséggel tudok?
24. Valaki egy LOTTÓ szelvénnel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes, ötös valószínűsége legalább $1/2$ legyen? (Ez 3 különálló kérdés.)