Matematika B4
III. gyakorlat

2005. szeptember 28.

1. Bevezető kérdések

1. Egy piros és egy kék dobókockával dobunk. Tekintsük az alábbi 3 eseményt: a piros kockával párosat dobunk, a kék kockával párosat dobunk, a dobott összeg páros. Függetlenek-e ezek az események?

   Megoldás: "Piros és Kék"-re: $P(P) = \frac{1}{2}$, $P(K) = \frac{1}{2}$, $P(P \text{ és } K) = \frac{1}{4}$. *Azaz* $P(P) \cdot P(K) = P(K \text{ és } P)$. *Tehát függetlenek.*
   Hasonlóképpen belátható, hogy Piros és Összeg, Kék és Összeg is függetlenek.
   Ám a 3 együtt már nem független, hiszen bármelyik 2 meghatározza a harmadikat.

2. a) Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke?

   Megoldás: $E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$.

   b) És ha két kockával dobunk, egy pirossal és egy kékkel, mennyi az összeg várható értéke?

   Megoldás: Legyen X a pirossal dobott szám és Y a kékkel dobott szám. Nyílván X és Y eloszlása megegyezik. A várható érték linearitásából: $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3,5 + 3,5 = 7$.

   c) És a két dobott szám különbségének várható értéke (piros kockával dobott számból kivonjuk a kék kockával dobott számot)?

   Megoldás: A várható érték linearitásából: $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 3,5 - 3,5 = 0$.

   d) És a két dobott szám eltérésének várható értéke (nagyobbik számból kivonjuk a kisebbet)?

   Megoldás: Az eseménytér:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

   Innen $E(|X-Y|) = \frac{10\cdot 1 + 8\cdot 2 + 6\cdot 3 + 4\cdot 4 + 2\cdot 5}{36} = \frac{70}{36}$.

2. Független események

A és B esemény függetlenek, ha teljesül, hogy $P(AB) = P(A)P(B)$. Több esemény akkor független, ha nem csak az teljesül, hogy

$$P(A_1A_2A_3 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n)$$

hanem tetszőleges A_i-k helyett mindkét oldalon azok komplementerét véve is igaz az egyenlőség, például a következő esetben:

$$P(\overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3}\ \overline{A_4} \ldots A_n) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})\ldots P(A_n)$$

Ilyen egyenletből 2^n darab van.

Feladatok:

3. Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B az az esemény, hogy másodikra dobunk fejet, C pedig, hogy a dobások egyezőek. Bizonyítsa be, hogy $\{A, B, C\}$ eseményrendszer bár páronként független eseményekből áll, teljesen nem független!

   Megoldás: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{2}$. $P(AésB) = \frac{1}{4}$, $P(AésC) = \frac{1}{4}$, $P(BésC) = \frac{1}{4}$. *Így páronként függetlenek, ám bármely kettő meghatározza a harmadikat, így teljesen nem független.*

4. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Az alábbi betűkkel jelöljük a következő eseményeket: $A =$\{ a dobott számok összege 7 \}, $B =$\{ legalább az egyik kockán van hatos \}, $C =$\{ mindkét kockával páratlant dobok \}, $D =$\{ a két kockával különböző számokat dobok \}, $E =$\{ a zöld kockával 4-est dobok \}.
   Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

   a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?

      Megoldás: $P(A) > 0$ *és* $P(C) > 0$, *ám* $P(AésC) = 0$, *így nem függetlenek.*

   b) Kizáróak-e az A és C események?

      Megoldás: Igen.

   c) Mennyi a B esemény valószínűsége? És mennyi a B valószínűsége, feltéve, hogy A bekövetkezett?

      Megoldás: $P(B) = \frac{11}{36}$ *ill.* $P(B|A) = \frac{2}{6}$.

   d) Hogy viszonul egymáshoz A és D? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?

      Megoldás: A része D-nek(ha A teljesül, akkor D is), amiből $P(A) < P(B)$

   e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?

      Megoldás: Igen

   f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek

      i. függetlenek, de nem kizáróak,

         Megoldás: A-E

      ii. kizáróak, de nem függetlenek.

         Megoldás: A-C

3. Hipergeometrikus eloszlás

A piros, és B fehér golyó közül húzunk n darabot. Annak a valószínűsége, hogy pontosan k db piros golyót húzzunk ki:

$$P(X=k)=h_{A,B,n}(k)=\frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$$

Például: A 2 találat valószínűsége az ötös lottón: $P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$

5. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot, egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X. $P(X=7)=$?

   Megoldás: Hipergeometrikus: $P=\frac{\binom{17}{7}\binom{13}{5}}{\binom{30}{12}}$.

6. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza ebből 30 fehér. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vedég kap neki megfelelő itókát?

   Megoldás: Hipergeometrikus: $P=\frac{\binom{30}{3}\binom{50}{7}}{\binom{80}{10}}$.

7. A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, minden színből 5. Kiosztok 5-5 lapot. Mi a valószínűsége, hogy az ellenfélnek van zöldje, ha nekem 3 zöldem és két pirosam van? És ha nem tudom milyen lapjaim vannak (még nem néztem meg)?

   Megoldás: Komplenter módszerrel: 1-ből vonjuk ki annak a valószínűségét, hogy az ellenfélnek nincs zöldje. Ez hipergeometrikus eloszlás. Így $P_1=1-\frac{\binom{13}{5}\binom{2}{0}}{\binom{15}{5}}=\frac{4}{7}\approx 0.5714$ *ill.* $P_2=1-\frac{\binom{15}{5}\binom{5}{0}}{\binom{20}{5}}\approx 0.8063$.

4. Binomiális eloszlás

Tipikus példa egy pénzdobás sorozatban a fejek száma. Ha n-szer dobtunk fel egy érmét, amely p valószínűséggel fej, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k db fej van a dobások között:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Például: Pontosan 3 hatost dobunk 20 dobásból: $P(X=3)=\binom{20}{3}(1/6)^3(5/6)^{17}$

8. Pisti nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 darab eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsi dereng, ezért kicsit több, mint 50%-os, mondjuk olyan 60%-os valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Milyen valószínűséggel megy át, ha a ketteshez 8 jó válasz kell?

   Megoldás: Binomiális: $P=\binom{10}{8}(0,6)^8(0,4)^2+\binom{10}{9}(0,6)^9(0,4)+\binom{10}{10}(0,6)^{10}$.

9. Egy rozsomák elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél 1/2 valószínűséggel jobbra, 1/2 valószínűséggel balra lép. 20 lépés megtétele után

   a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?

      Megoldás: Binomiális: 10 lépést ment balra, 10 lépést ment jobbra, így $P=\binom{20}{10}(0,5)^{10}(0,5)^{10}=\frac{\binom{20}{10}}{2^{20}}$.

b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?

Megoldás: 20 lépés után páros mezőn kell állnia, így $P = 0$.

c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti lépés után a (-3)-ban volt?

Megoldás: Nyílván akkor, ha az utolsó lépésben jobbra lép, azaz $P = \frac{1}{2}$.

10. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?

    Megoldás: Komplementerrel: $P_1 = 1 - (\frac{99}{100})^{50}$. *Rögzitsük a kulcsokat, ekkor annak a valószínűsége, hogy a jó az első 50-ben van:* $P_2 = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

11. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

    Megoldás: Bayes+Binomiális: $P = \frac{\binom{30}{25}(\frac{3}{4})^{25}(\frac{1}{4})^5}{\binom{30}{25}(\frac{3}{4})^{25}(\frac{1}{4})^5+\binom{30}{25}(\frac{1}{2})^{25}(\frac{1}{2})^5} = \frac{3^{25}}{3^{25}+2^{30}}$.

5. Várható érték I.

Ha X eloszlása: $P(X = x_i) = p_i$, akkor X várható értéke:

$$\sum_i x_i p_i \quad \text{, feltéve ha} \quad \sum_i |x_i|\, p_i < \infty$$

$t(X)$ várható értéke:

$$\sum_i t(x_i) p_i \quad \text{, feltéve ha} \quad \sum_i |t(x_i)|\, p_i < \infty$$

12. A diszkrét X eloszlás tagjai: p(x)=$\frac{x^2}{30}$ (x=1,2,3,4). Mennyi az eloszlás várható értéke?

    Megoldás: Behelyettesítve a képletbe: $E(X) = 1 \cdot \frac{1^2}{30} + 2 \cdot \frac{2^2}{30} + 3 \cdot \frac{3^2}{30} + 4 \cdot \frac{4^2}{30}$

13. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzék meg?

    Megoldás:Számoljuk ki először a várható értéket, és a feladat szövege szerint ezt kell kettővel beszoroznunk. Arra a valószínűség, hogy 1 000 000 Ft-ot nyerünk $\frac{1}{40000}$*, mivel a 40 000 db közül pontosan egy nyer. Arra az esély, hogy 50 000 Ft-ot nyerünk* $\frac{10}{40000}$*, mert a 40 000 db jegy közül pontosan 10-zel nyerhetünk ennyit, stb. A nyerhető értéket kell összeszorozunk a hozzájuk tartozó valószínűséggel, azaz a képlet:*

    $$m = \frac{1}{40000} \cdot 1000000 + \frac{10}{40000} \cdot 50000 + \frac{100}{40000} \cdot 5000 = 50$$

    A képletből hiányzik a 0 Ft-hoz tartozó tag, de az úgyis nulla lesz. Tehát egy jegy 100 Ft-ba kerüljön.

14. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára

hosszú távon?

Megoldás: $E(X) = \frac{3}{6} \cdot (-100) + \frac{1}{6} \cdot 400 + \frac{2}{6} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot (-100)) = \frac{25}{3}$. *Azaz a várható nyeremény pozitív, így előnyös a játék hosszú távon.*

15. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, mekkora, egy szelvénnyel fogadva, nyereségünk várható értéke?

    Megoldás: A lottónál hipergeometrikus eloszlásúak a valószínűségek.
    $E(X) = 700 \cdot \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} + 10000 \cdot \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} + 789000 \cdot \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} + 535000000 \cdot \frac{1}{\binom{90}{5}} \approx 15,73 + 8,12 + 7,63 + 12,17 = 43,66.$

16. Egy dobozban 2 piros és 2 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk az első pirosig, és jelöljük X-szel a húzások számát. Számoljuk ki: X, X^2, 2^X, $\frac{1}{2^X}$ várható értékét!

    Megoldás: Jelöljük X-szel a szükséges húzások számát, azaz $P(X = k) = P($k-adikra húzzuk az első pirosat$)$.

    $$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$
    $$P(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$$
    $$P(X = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

    A képlet alapján a kérdéses értékek:

    $$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$
    $$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{20}{6}$$
    $$E(2^X) = 2^1 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 2^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{22}{6}$$
    $$E(\frac{1}{2^X}) = \frac{1}{2^1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{48}$$

6. Házi feladatok

17. Háromszor dobunk fel egy pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások száma között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb 1 írás fordul elő. Függetlenek-e a fenti események egymástól?

    Megoldás: Az eseménytér: { I I I , I I F , I F I , F I I , I F F , F I F , F F I , F F F }
    Innen $P(A) = \frac{6}{8}$, $P(B) = \frac{4}{8}$, $P(AésB) = \frac{3}{8}$. *Mivel* $P(AésB) = P(A) \cdot P(B)$, *így függetlenek.*

18. A vidámparkban a céllövöldében játszom. Egymás után vonulnak fel a célpontok, mindegyiket egymástól függetlenül 2/3 valószínűséggel eltalálom. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 célzásból pontosan 4-et találok el? Mennyi a valószínűsége, hogy 2-nél többet találok el, de azért nem az összeset?

    Megoldás: Binomiális: $P = \binom{6}{4}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^2$. *Ha 2-nél többet, de nem az összeset találom el, akkor a találatok száma lehet 3, 4, vagy 5 azaz* $P = \binom{6}{3}(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^3 + \binom{6}{4}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^2 + \binom{6}{5}(\frac{2}{3})^5(\frac{1}{3})$.

19. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?

    Megoldás: Hipergeometrikus eloszlás: $P(X=k)=\frac{\binom{8}{k}\cdot\binom{14}{7-k}}{\binom{22}{7}}$*. Konkrétan* $P(X=2)=\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{14}{5}}{\binom{22}{7}}$.

20. Egy gyárban az I. gépsor az idő 60%-ában a II. gépsor az idő 70%-ában dolgozik egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége hogy a) mindkét gép dolgozik, b) legalább az egyik dolgozik, c) csak az egyik gép dolgozik d) mindkét gép áll?

    Megoldás: a) $P=0,6\cdot 0,7$ *b)*$P=1-0,4\cdot 0,3$ *c)*$P=0,6\cdot 0,3+0,7\cdot 0,4$ *d)* $P=0,4\cdot 0,3$.

21. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet, és odaadom Nektek. 30 dobás után el kell döntenetek, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznátok meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej az a maximális, amikor még az igazságos érmére tippelnétek?)

    Megoldás: Bayes+Binomiális: Annak a valószínűsége, hogy cinkelt az érme feltéve, hogy k fejet dobtunk (14. feladatból). $P(X=k)=\frac{\binom{30}{k}(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{30-k}}{\binom{30}{k}(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{30-k}+\binom{30}{k}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{30-k}}=\frac{3^k}{3^k+2^{30}}\geq\frac{1}{2}$*, milyen k-ra. Ebből könnyen* $3^k\geq 2^{30}$*, azaz* $k\geq 19$*-re már azt mondanám, hogy cinkelt.*

22. Mi a valószínűsége, hogy 0,1,2,3,4,5 találatom lesz a LOTTÓ-n?

    Megoldás: Hipergeometrikus: $P(X=k)=\frac{\binom{5}{k}\cdot\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$*,*

23. Mi a valószínűsége, hogy 11,12,13,13+1 találatom lesz a TOTÓ-n ha felteszem hogy minden választ 1/3 valószínűséggel tudok?

    Megoldás: Binomiális: $P(X=k)=\binom{14}{k}(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{14-k}$*,*

24. Valaki egy LOTTÓ szelvénnyel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes, ötös valószínűdége legalább 1/2 legyen? (Ez 3 különálló kérdés.)

    Megoldás: 22. feladatban már kiszámoltuk, P(X=k)=p értékét. Ekkor komplementermódszerrel annak a valószínűsége, hogy k hét alatt nyerünk: $1-(1-p)^k\geq\frac{1}{2}$ *és egyenlőtlenségből kiszámolhatók az egyes k-k.*