Matematika B4
IV. gyakorlat

2005. október 5.

1. Bevezető kérdések

1. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?

   a) Hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?

   b) Hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig?

   c) Hányadikra jön a következő leállás?

   d) Hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza)

2. Annak a valószínűsége, hogy egy évben egyetlen repülőgép sem zuhan le 10%. Változatlan forgalmi viszonyokat feltételezve, mire tippel, hány repülőgép fog lezuhanni a következő évben.

2. Geometriai eloszlás

Optimista geometriai eloszlás:
Hányadik dobásra jön elő az első hatos? $P(X = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$. Általánosabban: optimista GEO(p) eloszlású az a valószínűségi változó, ami a siker első előfordulásáig szükséges kísérletek számát számolja (a sikeres kísérlettel együtt), ahol a független kísérletekben a siker valószínűsge p: $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$.

Pesszimista geometriai eloszlás:
Hányat dobok az első hatos dobás előtt? $P(X = k) = (5/6)^k(1/6)$. Általánosabban: pesszimista GEO(p) eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első sikerig bekövetkezett kudarcokat számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsge p: $P(X = k) = (1 - p)^k p$.

3. Addig dobunk két kockával, amíg a két kockán lévő számjegyek összege 12 nem lesz.

   a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 12-nél kisebb összeget, mielőtt kidobnánk a 12-t?

   b) Mennyi a valószínűsége, hogy nyolcszor dobunk a kockákkal?

4. Egy (szabálytalan) pénzérmét dobunk fel annyiszor, amíg fejet nem kapunk. Ha a fej dobás valószínűsége p, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

   a) pont k-szor dobunk a fej előtt?

   b) pont k-szor dobunk az érmével?

3. Negatív binomiális eloszlás

Optimista negatív binomiális eloszlás:
Hányadikra jön ki a harmadik hatos? $P(X=k)=\binom{k-1}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-3}(1/6)=\binom{k-1}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-3}$. Általánosabban: NBIN$(l,p)$: siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hányszor kell a kísérlet elvégezni, hogy megkapjuk az l-edik sikert. $P(X=k)=\binom{k-1}{l-1}p^l(1-p)^{k-l}$

Pesszimista negatív binomiális eloszlás:
Hányat dobok a harmadik hatos dobás előtt? $P(X=k)=\binom{k}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-2}(1/6)=\binom{k}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-2}$. Általánosabban: NBIN$(l,p)$: siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hány kísérlet előzi meg az l-edik sikert. $P(X=k)=\binom{k}{l-1}p^l(1-p)^{k-l+1}$

5. Dobogatok a kockával és vonásal számolom, hogy hány hatost dobtam. Mi a valószínűsége, hogy a 12. dobásra húzom a harmadik vonást? Ha azt számolnám ki, hogy mennyi a valószínűsége, hogy 12-szer dobok hatostól különbözőt, mire kidobom a harmadik hatost, akkor az az előző eredménytől különbözne?

6. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0,2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0,95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)

   a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?
   c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" volt, mi a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson?
   d) Mi a valószínűsége hogy csütörtökön büntetik meg másodszor?

4. Poisson eloszlás

Ha a X egy valós valószízűségi változó az $x_k=k$ (k=0,1,2,...) értékeket veheti fel és

$$P(X=k)=p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

ahol $\lambda>0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük.

7. Egy kollégiumban egy év alatt 0.1%-os valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 év alatt legalább 1 tűzeset van?

8. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

9. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négyes gyakoriság ugyanolyan valószínűséggel fordul elő, mint az ötös gyakoriság. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a kettes gyakoriság.

10. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

11. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhuba van? És annak, hogy az első 6 oldalon nincs egy sem?

5. Várható érték II.

Ha X eloszlása: $P(X = x_i) = p_i$, akkor X várható értéke:

$$\sum_i x_i p_i \quad \text{, feltéve ha} \quad \sum_i |x_i|\, p_i < \infty$$

$t(X)$ várható értéke:

$$\sum_i t(x_i) p_i \quad \text{, feltéve ha} \quad \sum_i |t(x_i)|\, p_i < \infty$$

12. Legyen egy diszkrét eloszlás a következő: $x_k = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k}$ és $p_k = \frac{1}{2^k}$. Mennyi a várható értéke?
13. Albert és Béla a következőt játszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-t kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék hosszú távon?
14. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?
    a) Feltéve hogy az utolsó dobást is beleszámítjuk?
    b) Feltéve hogy az utolsó dobást nem számítjuk bele?
15. Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X-szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzássorozatot egy kísérletnek. a.) Adjuk meg a X valószínűségi változó eloszlását. b.) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét.
16. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!

6. Házi feladatok

17. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?
    a) hányadik autó vesz fel, amikor kiállok az országútra, mert autóstoppal akarok utazni?
    b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?
    c) a 12. autó a harmadik piros?
18. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy 5.
    a) Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?
    b) Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?
    c) Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?
19. Mennyi annak a valószínusége, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k öttalálatos szelvény lesz?
20. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol egyébként is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tudjuk, hogy valószínűbb, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nemlesz. Adjon becslést (lehetőleg élest) annak a valószínűségére, hogy pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt.

21. 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel jár órára. A teremben 200 db szék van.

    a) Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut szék?
    b) Hány szék kell, hogy biztosan (1 valószínűséggel) mindenkinek jusson szék?
    c) Hány szék kell, hogy legalább 0,99 valószínűséggel jusson mindenkinek szék?

22. Anna és Béla két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

23. Pista és Zoli kockáznak. Mindketten feldobnak egymás után egy piros és egy zöld kockát. Ha Pista 1-t vagy 2-t dob ő nyer és kap Zolitól 5 Ft-ot, ha Zoli 6-t dob ő a nyertes és 11 Ft-ot kap Pistától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszere dobnak nyerőt, nem fizetnek, hanem elölröl kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Józsit, dobáljon ő az egyetlen fekete kockával, de a nyerési és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes elfogadni Pistának Zoli ajánlatát?