Matematika B4
IV. gyakorlat

2005. október 5.

1. Bevezető kérdések

1. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?

   a) hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?

      Megoldás: Binomiális: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$*, ahol p=2%.*

   b) hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig?

      Megoldás: Negatív binomiális(pesszimista): $P(X = k) = \binom{k}{n-1} p^n (1-p)^{k-n+1}$

   c) Hányadikra jön a következő leállás?

      Megoldás: Geometriai(optimista): $P(X = k) = q^{k-1} p$.

   d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza)

      Megoldás: Geometriai(pesszimista): $P(X = k) = p^k q$.

2. Annak a valószínűsége, hogy egy évben egyetlen repülőgép sem zuhan le 10%. Változatlan forgalmi viszonyokat feltételezve, mire tippel, hány repülőgép fog lezuhanni a következő évben.

   Megoldás: Sok repülőgépjárat indul egy évben, és mindegyik járatnál ott van egy kis esély, hogy az adott járat lezuhan. Ez egy nagy n-hez és kis p-hez tartozó binomiális eloszlás, aminél sem n-et, sem p-t nem tudjuk. Ezt Poisson eloszlással közelíthető, és ebben a példában mást nem is tudunk használni. (Íratlan szabály, hogy ahol látszólag kevés adat van, az Poisson lesz.)

   $$X = \{\text{Egy évben lezuhanó repcsik száma}\}$$

   $P(X = 0) = 0.1$ *a feladat szövege szerint, és a Poisson eloszlás képlete alapján:* $P(X = 0) = \dfrac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}$

   Ez a két érték megegyezik, innen következik, hogy $\lambda = log10 \approx 2,3$*. Ha* λ *egész, akkor a legvalószínűbb érték (szemléletesen a legmagasabb pálcika)* λ *és* $\lambda - 1$*, ha* λ *tört, akkor ez az érték* $\lfloor \lambda \rfloor$*. Vagyis az esetünkben a válsz:* $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$*. Két repülő lezuhanása a legvalószínűbb 1 év alatt.*

2. Geometriai eloszlás

Optimista geometriai eloszlás:
Hányadik dobásra jön elő az első hatos? $P(X = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$. Általánosabban: optimista GEO(p) eloszlású az a valószínűségi változó, ami a siker első előfordulásáig szükséges kísérletek számát számolja (a sikeres kísérlettel együtt), ahol a független kísérletekben a siker valószínűsge p: $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$.

Pesszimista geometriai eloszlás:
Hányat dobok az első hatos dobás előtt? $P(X = k) = (5/6)^k(1/6)$. Általánosabban: pesszimista GEO(p) eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első sikerig bekövetkezett kudarcokat számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsge p: $P(X = k) = (1 - p)^k p$.

3. Addig dobunk két kockával, amíg a két kockán lévő számjegyek összege 12 nem lesz.

   a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 12-nél kisebb összeget, mielőtt kidobnánk a 12-t?

      Megoldás: Geometriai(pesszimista). A siker valószínűsége: $p = \frac{1}{36}$. *Így* $P = (\frac{35}{36})^8 \cdot \frac{1}{36}$.

   b) Mennyi a valószínűsége, hogy nyolcszor dobunk a kockákkal?

      Megoldás: Geometriai(optimista). A siker valószínűsége: $p = \frac{1}{36}$. *Így* $P = (\frac{35}{36})^7 \cdot \frac{1}{36}$.

4. Egy (szabálytalan) pénzérmét dobunk fel annyiszor, amíg fejet nem kapunk. Ha a fej dobás valószínűsége p, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

   a) pont k-szor dobunk a fej előtt?

      Megoldás: Geometriai(pesszimista). Így $P = (1 - p)^k \cdot p$.

   b) pont k-szor dobunk az érmével?

      Megoldás: Geometriai(optimista). Így $P = (1 - p)^{k-1} \cdot p$.

3. Negatív binomiális eloszlás

Optimista negatív binomiális eloszlás:
Hányadikra jön ki a harmadik hatos? $P(X = k) = \binom{k-1}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-3}(1/6) =$
$\binom{k-1}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-3}$. Általánosabban: NBIN($l, p$): siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hányszor kell a kísérlet elvégezni, hogy megkapjuk az l-edik sikert. $P(X = k) = \binom{k-1}{l-1}p^l(1 - p)^{k-l}$

Pesszimista negatív binomiális eloszlás:
Hányat dobok a harmadik hatos dobás előtt? $P(X = k) = \binom{k}{2}(1/6)^2(5/6)^{k-2}(1/6) =$
$\binom{k}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-2}$. Általánosabban: NBIN($l, p$): siker valószínűsége p, a valószínűségi változó azt számolja, hány kísérlet előzi meg az l-edik sikert. $P(X = k) = \binom{k}{l-1}p^l(1 - p)^{k-l+1}$

5. Dobogatok a kockával és vonásal számolom, hogy hány hatost dobtam. Mi a valószínűsége, hogy a 12. dobásra húzom a harmadik vonást? Ha azt számolnám ki, hogy mennyi a valószínűsége, hogy 12-szer dobok hatostól különbözőt, mire kidobom a harmadik hatost, akkor az az előző eredménytől különbözne?

   Megoldás: Negativ binomiális: $P = \binom{11}{2}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^9$.

6. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0,2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0,95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)

a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?

Megoldás: $P = (1 - 0,2 \cdot 0,95)^5 = 0,81^5$.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?

Megoldás: Binomiális: $P = \binom{5}{2}(0,19)^2(0,81)^3$.

c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" volt, mi a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson?

Megoldás: P=(P(volt villamoson ellenőr és nem büntette meg)/P(nem büntette meg))$^5 = (\frac{0,2 \cdot 0,05}{1-0,2\cdot 0,95})^5 = (\frac{0,01}{0,81})^5$.

d) Mi a valószínűsége hogy csütörtökön büntetik meg másodszor?

Megoldás: Negatív binomiális: $P = \binom{3}{1}(0,19)^2(0,81)^2$.

4. Poisson eloszlás

Ha a X egy valós valószízűségi változó az $x_k = k$ (k=0,1,2,...) értékeket veheti fel és

$$P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

ahol $\lambda > 0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük.

7. Egy kollégiumban egy év alatt 0.1%-os valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 év alatt legalább 1 tűzeset van?

   Megoldás: Komplementermódszerrel: $P = 1 - 0,999^5 \approx 0,00499001$.
   Poisson eloszlással közelítve: $\lambda = 0,005$, *így* $P = 1 - e^{-0,005} \approx 0,00498752$.
   Jól látható, hogy az eltérés minimális.

8. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

   Megoldás: Ez a feladatat kiszámolható binomiális eloszlással is, de mivel a 200 *már "nagy", a* 0.01 *pedig kicsi, ezért a nagy binomiális kifejezések számolása helyett számolhatunk Poissonnal, így nem fogunk pontos értéket kapni, ám a most kiszámolt hiba esetünkben 1 század alatt lesz.*
   Ha n*-edrendű* p *paraméterű binomiálist közelítünk Poissonnal, akkor* λ*-t* np*-nek kell választani. Esetünkben:*

$$X = \{\text{200 ember közül a balkezesek száma}\}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3)$$

$$= 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} \approx 0.1429$$

9. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négyes gyakoriság ugyanolyan valószínűséggel fordul elő, mint az ötös gyakoriság. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a kettes gyakoriság.

Megoldás: Az előzőekhez hasonlóan itt is meg lehet indokolni, hogy miért közelíthetünk Poisson eloszlással. (Sok lakás van, mindegyik nap mindegyik lakásban egy kis valószínűséggel üt ki tűz.)

$$X = \{\textit{lakástüzek száma naponta}\}$$

$$P(X=4) = P(X=5) \Rightarrow \frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}$$

Egyszerű átrendezés után kapjuk, hogy $\lambda = 5$. A kérdéses érték:

$$P(X=2) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{25}{2}e^{-5} \approx 0.08422$$

10. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

    Megoldás: A sütiből sokat készítenek, és mindig egy jó nagy masszába dobják be a mazsolákat. Itt is használhatunk Poisson eloszlást. Egy λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke (erről később még lesz szó): λ. Ez azt jelenti, hogy ha a paraméter λ, akkor sok kísérlet átlaga λ-hoz fog tartani, vagyis átlagosan λ mazsola lesz egy sütiben. Azaz ha kiszámoltuk a megfelelő λ értéket, akkor az lesz a megoldás.

    $$X = \{\textit{egy kiválasztott sütiben lévő mazsolák száma}\}$$

    $$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} \geq 0.99 \Rightarrow \lambda \geq log100 \approx 4,6$$

    A fenti átalakításokat nem akarom részletezni. Csak át kell rendezni, és mindkét oldalt be kell szorozni 100-zal és e^{λ}-val. Tehát legalább $4,6$ db mazsolának kell egy sütire jutnia.

11. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhuba van? És annak, hogy az első 6 oldalon nincs egy sem?

    Megoldás:Poissonnal közelítünk. Nincs jelentősége, hogy a 13. oldalról van szó. Átlagosan fél sajtóhiba van egy lapon, vagyis $\lambda = 1/2$.

    $$P(\textit{A 13. oldalon lévő sajtóhibák száma} > 1) =$$

    $$1 - P(\textit{A 13. oldalon lévő sajtóhibák száma} = 0) - P(\textit{A 13. oldalon lévő sajtóhibák száma} = 1) =$$

    $$1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} \approx 0,090204$$

    6 oldalra $6\frac{1}{2} = 3$ átlagosan hibát "várunk", ezért ebben az esetben $\lambda_2 = 3$.

    $$\frac{{\lambda_2}^0}{0!}e^{\lambda_2} \approx 0,05$$

5. Várható érték II.

Ha X eloszlása: $P(X = x_i) = p_i$, akkor X várható értéke:

$$\sum_i x_i p_i \quad \text{, feltéve ha} \quad \sum_i |x_i|\, p_i < \infty$$

$t(X)$ várható értéke:

$$\sum_i t(x_i) p_i \quad \text{, feltéve ha} \quad \sum_i |t(x_i)|\, p_i < \infty$$

12. Legyen egy diszkrét eloszlás a következő: $x_k = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k}$ és $p_k = \frac{1}{2^k}$. Mennyi a várható értéke?

    Megoldás: Várható érték akkor létezik, ha $E(|X|)$ véges. $E(|X|) = \sum p_k \cdot |x_k| = \sum \frac{1}{2^k} \cdot \frac{2^k}{k} = \sum \frac{1}{k}$, ami közismert hogy nem véges.

13. Albert és Béla a következőt játszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-t kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék hosszú távon?

    Megoldás: A bonyolultabb eset:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*0*	*1*	*4*	*9*	*16*	*25*
2	*1*	*0*	*1*	*4*	*9*	*16*
3	*4*	*1*	*0*	*1*	*4*	*9*
4	*9*	*4*	*1*	*0*	*1*	*4*
5	*16*	*9*	*4*	*1*	*0*	*1*
6	*25*	*16*	*9*	*4*	*1*	*0*

    Egy 6x6-os táblán írjuk fel az összes esetet. Ezt tegyük meg mindkét esetben, úgy is, hogy Albert mennyi pénzt ad Bélának, és egy másik táblán, hogy Béla mennyi pénzt ad Albertnek. A felírt események mindegyike $\frac{1}{36}$ valószínűséggel fordul elő, ezért mindegyik értéket $\frac{1}{36}$-dal megszorozva és összeadva megkapjuk, hogy Béla "átlagosan" (sok játék után a Béla által kifizetett pénz ennyi körül stabilizálódna) $\frac{35}{6}$ Ft-ot ad Aladárnak, míg "átlagosan" 7 Ft-ot kap. Így Béla jár jobban.

14. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?

    a) Feltéve hogy az utolsó dobást is beleszámítjuk?

       Megoldás: Mindkét esetben optimista geometriai eloszlásról van szó. Az órán levezetett képlet szerint a p paraméterű geometriai eloszlás várható értéke $\frac{1}{p}$. Az első esetben a siker valószínűsége egy dobásnál $\frac{1}{6}$, ennyi lesz a paraméter, tehát a várható érték 6 lesz, a második esetben a paraméter $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$, tehát a várható érték $\frac{36}{11} \approx 3,27$ lesz.

    b) Feltéve hogy az utolsó dobást nem számítjuk bele?

       Megoldás: Vegyük észre, hogy a feladat majdnem ugyanaz. A különbség abból áll, hogy ha például harmadikra jön ki a hatos, akkor az első kérdés szerint 3-at számolunk, a második esetében csak kettőt. Az első kérdés átfogalmazva: "Hányadikra jön ki a hatos?", míg a második kérdés: "Hány kudarcot kell megélnem a hatos dobás előtt?". Nyílván a második esetben mindig eggyel kevesebbet kapunk. Ez utóbbi a pesszimista geometriai eloszlás. A várható értéknél egy szummát számolunk, ahol minden érték eggyel kisebb lett. Mivel ezeket az értékeket adjuk össze megfelelő súlyozással, ezért az összeg is eggyel kisebb lesz. Azaz a várható érték: $6 - 1 = 5$ és $\frac{36}{11} - 1 \approx 2,27$.

15. Egy dobozban 5 piros és 2 kék golyó van. Visszatevés nélkül húzzunk addig, amíg az első kék golyót kihúzzuk. Jelöljük X-szel az első kék golyó húzásának sorszámát. Tekintsük egy ilyen húzássorozatot egy kísérletnek. a.) Adjuk meg a X valószínűségi változó eloszlását. b.) Számítsuk ki a X valószínűségi változó várható értékét.

    Megoldás: $P(X = 1) = \frac{2}{7} = \frac{6}{21}$
    $P(X = 2) = \frac{5}{7}\frac{2}{6} = \frac{5}{21}$
    $P(X = 3) = \frac{5}{7}\frac{4}{6}\frac{2}{5} = \frac{4}{21}$
    $P(X = 4) = \frac{3}{21}$, $P(X = 5) = \frac{2}{21}$, $P(X = 6) = \frac{1}{21}$
    $E(X) = 1 \cdot \frac{6}{21} + 2 \cdot \frac{5}{21} + 3 \cdot \frac{4}{21} + 4 \cdot \frac{3}{21} + 5 \cdot \frac{2}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{8}{3}$.

16. Egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy kockával, amelynek öt oldala zöld, hatodik pedig fekete, egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100

Ft-ot kap, ahány zöldet dobott addig. Ha viszont bármikor feketét dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Keresse meg a játékos számára optimális stratégiát és győződjön meg, hogy még az is veszteséges!

Megoldás: Tegyük fel, hogy akkor hagyjuk abba a játékot,ha k-szor nyertünk. Ekkor $E_k(X) = p \cdot 100k = (\frac{5}{6})^k \cdot 100k$*. Deriválással meghatározható, hogy maximuma valahol 5 és 6 között. Valójában* $E_5 = E_6 \approx 201$*, ami kisebb 250-nél.*

6. Házi feladatok

17. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?

    a) hányadik autó vesz fel, amikor kiállok az országútra, mert autóstoppal akarok utazni?

    Megoldás: Geometriai(optimista)

    b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?

    Megoldás: Binomiális

    c) a 12. autó a harmadik piros?

    Megoldás: Negatív binomiális

18. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy 5.

    a) Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?

    Megoldás: $P(X = 2) = 3 \cdot P(X = 5)$*. Kiírva* $e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^5}{5!}$*. Rendezve:* $\lambda^3 = 20$*. Így* $\lambda = \sqrt[3]{20} \approx 2,7$*. Amiből 2 a legvalószínűbb érték.*

    b) Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?

    Megoldás: P=$e^{-\lambda} = e^{-\sqrt[3]{20}} \approx 6,7\%$.

    c) Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?

    Megoldás: $\lambda = \sqrt[3]{20} \approx 2,7$.

19. Mennyi annak a valószínusége, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k öttalálatos szelvény lesz?

    Megoldás: Poissonnal közelítve: $\lambda = \frac{4000000}{\binom{90}{5}}$*, és* $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$.

20. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol egyébként is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tudjuk, hogy valószínűbb, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nemlesz. Adjon becslést (lehetőleg élest) annak a valószínűségére, hogy pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt.

    Megoldás: Poissonnal közelítve: Legyen λ *az átlagos gyorshajtók száma. A feladat szerint* $P(X = 0) \leq \frac{1}{2}$*, azaz* $e^{-\lambda} \leq \frac{1}{2}$*, amiből* $\lambda \geq \ln 2$.

21. 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel jár órára. A teremben 200 db szék van.

    a) Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut szék?

    Megoldás: Binomiális/Poisson: Poissonnál $\lambda = 400 \cdot 0,6 = 240$. $P(X \leq 200) = P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots P(X = 200)$.

b) Hány szék kell, hogy biztosan (1 valószínűséggel) mindenkinek jusson szék?

Megoldás: 400 szék kell, hogy mindenki biztosan le tudjon ülni, hiszen $0,6^{400}$ *a valószínűsége, hogy mind a 400 bejön órára, ami nagyobb, mint 0.*

c) Hány szék kell, hogy legalább 0,99 valószínűséggel jusson mindenkinek szék?

Megoldás: Geometriai(pesszimista): $P(X \leq k) = P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots P(X = k) \geq 0,99.$ *egyenlőséget kell megoldani k-ra. Elkezdjük a valószínűségeket összeadni addig, amíg az összeg meg nem haladja 0,99-t.*

22. Anna és Béla két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

    Megoldás: $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, *így akkor igazságos, ha a pénzösszegek aránya 2:1.*

23. Pista és Zoli kockáznak. Mindketten feldobnak egymás után egy piros és egy zöld kockát. Ha Pista 1-t vagy 2-t dob ő nyer és kap Zolitól 5 Ft-ot, ha Zoli 6-t dob ő a nyertes és 11 Ft-ot kap Pistától. Ha egyikük sem nyer, illetve ha mindketten egyszere dobnak nyerőt, nem fizetnek, hanem elölről kezdik a dobálást. Zoli azt javasolja, hogy ne koptassanak két kockát, inkább kérjék meg Józsit, dobáljon ő az egyetlen fekete kockával, de a nyerési és fizetési feltételek maradjanak változatlanok. Érdemes elfogadni Pistának Zoli ajánlatát?

    Megoldás: Legyen X Pista nyereménye. Ekkor $E(X) = (1 - (\frac{4}{6})^2) \cdot 5 - (1 - (\frac{5}{6})^2) \cdot 11 = -\frac{7}{12}$.
    Másik esetben legyen Y Pista nyereménye. Ekkor $E(Y) = \frac{2}{6} \cdot 5 - \frac{1}{6} \cdot 11 = -\frac{1}{6}$. *Tehát érdemes elfogadnia az ajánlatot. (Bár a legjobb az lenne, ha nem is játszana)*