Matematika B4
VI. gyakorlat

2005. október 18.

1. Bevezető kérdések

1. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka álmomból felriadva a nagymutató az óralap képzeletbeli függőlges középvonalához képest jobbra van? És annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös és 6-os számjegy közötti $\frac{1}{12}$ részén van?

   Megoldás: Az első kérdésre a válasz triviálisan $\frac{1}{2}$. A másodikra sem nehéz meggondolni, hogy $\frac{1}{12}$

2. A mozigép egy film közepén elromlott, és szerencsétlen módon a szalagtovábbitó elszakította a filmszalagot (a szakadás merőleges lett a szalag haladási irányára). Egy képkocka $20mm$ hosszú és a képkockák között $2mm$-es felhasználatlan csík van. Mi a valószínűsége, hogy a masina egy képkockába szakított bele?

   Megoldás: "jó eset/összes eset"=$\frac{20}{22}$.

3. Legyen X egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a, b) intervallumon.

   a) $P(X < x) =?$

   Megoldás:

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \textit{ha } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \textit{ha } x \in [a, b] \\ 1 & \textit{ha } x > b \end{array} \right\}$$

   b) $\frac{P(X \in (x_1, x_2))}{x_2 - x_1} =?$

   Megoldás: Ha $x_1, x_2 \in [a, b]$, akkor ez a sűrűsségfüggvénnyel egyezik meg, így az értéke: $\frac{1}{b-a}$.

2. Folytonos egyenletes eloszlás

Ha egy véges intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy a pont az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínuséggel essen, akkor a pont koordinátája egyenletes eloszlású az adott intervallumon. Ha a és b ennek a véges intervallumunk két végpontja, akkor az eloszlást **E(a,b)**-vel jelöljük. Annak a valószínűsége, hogy egy $E(a.b)$ eloszlású véletlen szám egy d hosszúságú szakaszba essen (a fentiek alapján): $\frac{d}{b-a}$.

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz hossza}}{\text{az egész eseménytér hossza}}$$

Hasonló elgondolás alapján ha egy pont egy véges területű síktartomány bármely részére a kiválasztott rész területével arányos valószínűséggel esik, akkor a pont helyének eloszlása egyeneletes eloszlású az adott síktartományon.

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz területe}}{\text{az egész eseménytér területe}}$$

Véges térfogatú térrészen értelmezett egyenletes eloszlás esetén:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz térfogata}}{\text{az egész eseménytér térfogata}}$$

Feladatok:

4. Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pont a kör belsejébe esik?

   Megoldás: Legyen a háromszög oldala egységnyi, ekkor a területe: $T_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. *A háromszög magassága:* $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$, *a beírható kör sugara pedig ennek az egyharmada, így* $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$. *Ebből a kör területe:* $T_2 = r^2\pi = (\frac{\sqrt{3}}{6})^2\pi = \frac{\pi}{12}$. *Így a keresett valószínűség:* $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5. Egy körbe szabályos hatszöget rajzolunk. Mi a valószínűsége, hogy a körben egyenletesen választott pont a hatszögben is benne van?

   Megoldás: Legyen a hatszög oldala egységnyi, ekkor a területe(6 szabályos háromszögből áll): $T_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. *A körülírt kör sugara szintén egységnyi, azaz* $r = 1$. *Ebből a kör területe:* $T_2 = r^2\pi = \pi$. *Így a keresett valószínűség:* $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{4}}{\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

6. Mi a valószínűsége, hogy a (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül

   a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másiknak?

      Megoldás: A feltételek szerint: $x \leq 2y$. *Így a jó terület a négyzet* $y = \frac{x}{2}$ *egyenes feletti része. Ennek területe* $T = \frac{3}{4}$. *Mivel a négyzet területe egységnyi, így* $P = T = \frac{3}{4}$.

   b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátától?

      Megoldás: A feltételek szerint: $x^2 < y$. *Így a jó terület a négyzet* $y = x^2$ *parabola feletti része. Ennek területe integrálszámítással kapható* $T = 1 - \int_0^1 t^2 dt = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. *Mivel a négyzet területe egységnyi, így* $P = T = \frac{2}{3}$.

7. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb $\frac{1}{4}$ területegységnél?

   Megoldás: A feltételek szerint: $K = 2x + 2y > 2$ *és* $T = xy < \frac{1}{4}$. *Azaz* $y > 1 - x$ *és* $y < \frac{1}{4x}$, *tehát a keresett terület az egyenes feletti és a hiperbola alatti rész. Ennek komplementerének területét számolom ki: Az egyenes alatti rész* $T_1 = \frac{1}{2}$ *területű háromszög. A hiperbola feletti rész:* $T_2 = \int_{\frac{1}{4}}^{1} 1 - \frac{1}{4x} dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \ln 4$. *Így a keresett valószínűség:* $P = 1 - T_1 - T_2 = 1 - \frac{1}{2} - (\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \ln 4) = \frac{1}{4} \cdot \ln 4 - \frac{1}{4}$.

8. Mi a valószínűsége, hogy ha a $(0, 1)$ intervallumon kiválasztunk

   a) 2 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a kisebbik pont kisebb x-nél?

      Megoldás: "Komplementer-módszerrel": Ennek az eseménynek a komplementere az, hogy mindkét pont nagyobb x-nél, azaz az $[x, 1]$ *intervallumba esik. Ennek hossza 1-x, így:* $P = 1 - (1 - x)^2$.

   b) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a kisebbik pont kisebb x-nél?

      Megoldás: Hasonlóképp: $P = 1 - (1 - x)^3$.

c) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a nagyobb pont kisebb x-nél?

Megoldás: Ha a legnagyobb kisebb x-nél, ez ekvivalens azzal, hogy az összes kisebb x-nél, így: $P = x^3$.

d) 3 pontot egyenletes eloszlással, akkor az elhelyezkedésük szerint a második legkisebb pont kisebb x-nél?

Megoldás: Alapvetően két eset lehetséges: mindhárom pont kisebb x-nél, vagy kettő kisebb és egy nagyobb(ebben az esetben számít, hogy melyik a nagyobb). Ennek megfelelően a valószínűség:
$P = x^3 + 3 \cdot x^2(1-x)$.

9. *Buffon-féle tűprobléma:* Egy nagy papírlapra 4 cm-enként párhuzamos vonalakat húzunk, majd egy 2 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű vonalra esik?

Megoldás: A paraméterezés történjen a tű középpontjának távolsága az egyik egyenestől(y), illetve az egyenessel bezárt szög(α). Könnyen átgondoható, hogy akkor metszi a tű az egyenest, ha $y < \sin(\alpha)$, vagy $y > 4 - \sin(\alpha)$. (Itt $0 < y < 4$ és $0 < \alpha < \pi$.). A jó terület: $T_1 = 2 \cdot \int\limits_0^\pi \sin(x)dx = 2 \cdot 2 = 4$. Az egész eseménytér területe $T_2 = 4\pi$. Így $P = \frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{4\pi} = \frac{1}{\pi}$.

10. Mi a valószínűsége, hogy 3 független $(0,1)$-en választott pont közül pontosan 1-1 essen a $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, és $(\frac{2}{3}, 1)$ intervallumba?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a megfelelő intervallumokba essenek a pontok: $(\frac{1}{3})^3$. Ezt meg kell szorozni a lehetséggel sorrendekkel(permutáció), így $P = 3! \cdot (\frac{1}{3})^3 = \frac{6}{3^3} = \frac{6}{27}$.

11. 0 és 1 között két számot választunk egymástól föggetlenül, egyenletes eloszlás szerint.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám?

Megoldás: Tegyük fel, hogy y>x. Ekkor $|x-y| = y - x < min\{x,y\} = x$, ebből $y < 2x$. Hasonlóképp(szimmetriaokokból), ha x>y, akkor $y > \frac{1}{2}x$ adódik. Így a keresett valószínűség: $P = \frac{1}{2}$.

b) A két szám három darabra vágja a $[0,1]$ intervallumot. Mi valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet összerakni?

Megoldás: Nyílván akkor alkot háromszöget, ha teljeseülnek a háromszögegyenlőtlenségek. Legyen a két véletlenszám x és y úgy, hogy x<y. Ekkor az alábbiaknak kell teljesülnie $x < 1-x$, $y > \frac{1}{2}$, $y - x < \frac{1}{2}$. Azaz $x < \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{2}$, $y < x + \frac{1}{2}$. Ez egy 1/8 területű háromszöget alkot. Szimmetriaokok miatt x>y-ra is ugyanez adódik, így $P = \frac{1}{4}$.

12. Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán egy-egy pontot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága kisebb, mint x ($1 \leq x \leq \sqrt{2}$)?

Megoldás: Legyen a két átellenes oldalon felvett véletlen eloszlás értéke x,y ($0 < x, y < 1$). Vegyük a szokásos négyzetes ábrázolási módot. Pitagorasz tételéből, ha $d = |b - a|$, akkor $d^2 + 1 < x^2$-nek kell teljesülnie, azaz $d < \sqrt{x^2 - 1}$. Azaz a megfelelő terület az y>x-d és az y<x+d által kimetszett területe a négyzetnek. Ez pedig: $P = T = 1 - (1-d)^2 = 1 - 1 + 2d - d^2 = 2d - d^2 = 2\sqrt{x^2-1} + 1 - x^2$.

Házi feladat

13. Válasszunk k db pontot a (0,1) intervallumon egymástól függetlenül, egyenként egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége, hogy az elhelyezkedésük szerint az l-edik kisebb x-nél?

14. Egy körbe szabályos háromszöget rajzolunk. A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a pont a háromszög belsejébe esik?

15. A $(0, 1)$ intervallumban egyeneletes eloszlás szerint választunk egy számot. Mi a valószínűsége, hogy olyan számot választunk, amelynek végtelen decimális kifejtése nem tartalmaz egyes számjegyet?

16. Egy hosszú, magas kerítés egymástól L távolságra leszúrt, D átmérőjű függőleges rudakból áll. Egy d átmérőjű labdát elég messziről, csukott szemmel a kerítés felé dobunk. A labda vagy nekiütődik valamelyik rúdnak, vagy érintés nélkül átrepül közöttük. Mi a valószínűsége annak, hogy a labda a rudak érintése nélkül átrepül a rudak között?

17. Egy ropit két egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választott helyen eltörünk. Mi a valószínűsége, hogy a középső darab hosszabb a ropi felénél?

18. *Általános Buffon-féle tűprobléma:* Egy nagy papírlapra d cm-enként párhuzamos vonalakat húzunk, maj egy $2l$ cm hosszű tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége, hogy a tű vonalra esik?

19. Egy papírra 4 cm-enkét függőleges és vízszintes vonalakat húzunk, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a 2 cm hosszú tű

    a) legalább 1 vonalra esik?
    b) pontosan 1 vonalra esik?

20. Egy piros, egy fehér és egy zöld pontot teszünk a $[0, 1]$ intervallumra egymástól függetlenül, külön-külön egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros és a zöld pont közötti távolság legfeljebb $\frac{1}{3}$, és a fehér pont a piros és a zöld közé kerül?

21. *Bertrand-paradoxon:* Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?

    a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.
    b) A kör kerületén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.
    c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.