Matematika B4
VIII. gyakorlat megoldása

2005.április 7.

1. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Ha az X egy folytonos valószínűségi változó, akkor X-et jól jellemzi az eloszlás illetve a sűrűségfüggvénye.
Az eloszlásfüggvény jellemzői:

1. Az eloszlásfüggvény x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x számnál kisebb értéket:

   $F(x) = P(X < x)$

   Egy folytonos eloszlás eloszlásfüggvényére mindig teljesül:

2. a $(-\infty)$-ben 0-hoz, a ∞-ban 1-hez tart
3. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$
4. mindenhol folytonos

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re
2. minden x-re $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ ezért $F'(x) = f(x)$ majdnem olyan x-re, ahol $F(x)$ folytonos.
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

A valószínűségi változó várható értéke:
$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt$

és tetszőleges t(X) függvényének várható értéke: $E(t(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t(u)f(u)du$

Feladatok

1. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény: (ahol a függvény nics megadva, ott automatikusan 0)

   a)

   $$F(x) = 1 + e^{-x+1} \quad \text{ha} \quad -1 < x$$

   Mindegyik feladatnál a fent leírt feltételeket kell ellenőrizni. Ez nem eloszlásfüggvény, ugyanis nem igaz, hogy monton nőne. Megjegyzés: A definícióból látszik, hogy az eloszlásfüggvény mindig 0 és 1 között van, ez sem teljesül.

b)

$$G(x) = 2 - \frac{2}{x+1} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

∞-ben 2-höz tart, tehát nem lehet eloszlásfüggvény.

c)

$$h(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

Minden teljesül (mindenhol folytonos, $(-\infty)$-ben 0-hoz, ∞-ben 1-hez tart, monoton növekvő, és mindenhol folytonos), ezért ez eloszlásfüggvény.

d)

$$H(x) = \frac{x}{4}(4-x) \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 2 \quad \text{és} \quad 1 \quad \text{ha} \quad x > 2$$

A folytonosság szempontjából lehetséges gyenge pont a 0 és a 2, de ha megnézzük ott is folytonos. Egyszerű deriválással kijön, hogy monoton növekvő. A $+/-\infty$-ben jól viselkedik, mivel mindkét helyen egy idő után a kívánt konstans lesz, így ez eloszlásfüggvény.

2. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

a)

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ha} \quad x > 1$$

Két feltételnek kell teljesülnie f-re nézve: mindenhol nemnegatívnak kell lennie, és a teljes számegyenesen vett integrálja pedig legyen 1. Mivel a függvény 1-nél kisebb helyeken 0, ezért az integrált a következő képpen számolhatjuk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{1}^{\infty} \frac{2}{t}dt = \infty \neq 1$$

(Az $\frac{2}{t}$ primitívfüggvénye $2ln(t)$, amely végtelenhez tartva végtelenhez tart.)
Így a függvény nem sűrűségfüggvény.

b)

$$g(x) = \frac{sin(x)}{2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2$$

$g(x)$ mindenhol nemnegatív, de az integrálja a teljes számegyenesen nem lesz 1, így nem sűrűségfüggvény.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \int_{0}^{2} \frac{\sin(t)}{2}dt = \left[\frac{-\cos(x)}{2}\right]_0^2 \approx 0.708073 \neq 1$$

c)

$$h(x) = \frac{1}{3}sin(\frac{x}{2}) \quad \text{ha} \quad 0 < x < pi \quad \text{és} \quad 3^{x-1}ln(3) \quad \text{ha} \quad x \leq 0$$

A nemnegativitást elég gyorsan lehet látni. A teljes integrál pedig 1 lesz, tehát ez egy sűrűségfüggvény.

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(t/2)}{3}dt + \int_{-\infty}^{0} 3^{t-1}Log(3) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

d)

$$i(x) = 2e^{-2x} \quad \text{ha} \quad x > 0$$

A függvény nemnegatív, a teljes intervallumon vett integrálja pedig 1, így sűrűségfüggvény.

$$\int_{-\infty}^{\infty} i(t)dt = \int_{0}^{\infty} 2e^{-2t}dt = 1$$

3. Egy tüzérségi lövedék a célterületet egy r sugarú körön belül éri el. A körön bármely területre érkezés valószínűsége arányos az adott terület mérőszámával.Az X valószínűségi változó jelentse a becsapódás pontjának távolságát a célterület középpontjától. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik?

   Számoljunk ki egy konkrét értéket! Mi a valószínűsége, hogy a lövedék egy $r/2$ sugarú körbe esik? Ez egyeneletes eloszlás az r sugarú körlapon, így a válasz az $r/2$ és az r sugarú kör aránya (a két területet elosztjuk egymással):

$$\frac{(r/2)^2\pi}{r^2\pi} = \frac{1}{4}$$

   Szeretnénk kiszámolni az eloszlásfüggvényt. X-szel jelölve a távolságot a kör közepétől és $F(x)$-szel az eloszlásfüggvényt. Ha $x \in [0, r]$ akkor:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{\textit{x sugarú kör területe}}{\textit{a teljes körlap}} = \frac{x^2\pi}{r^2\pi} = \frac{x^2}{r^2}$$

   Az $F(x)$ függvény így fog kinézni:

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{x^2}{r^2} & \textit{ha } x \in [0, r] \\ 1 & \textit{ha } x > r \end{array} \right\}$$

   A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja. Így a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2x}{r^2} & \textit{ha } x \in [0, r] \\ 0 & \textit{egyébként} \end{array} \right\}$$

   Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik? A következő számolások ekvivalensek, mindegyik jó:

$$F(\frac{3r}{4}) - F(\frac{r}{2}) = \int_{r/2}^{3r/4} f(t)dt = \frac{5}{16}$$

4. Egy l hosszúsági ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbik eloszlásfüggvénye?
   Nézzünk először egy konkrét példát! Mi a valószínűsége, hogy $\frac{l}{4}$-nél rövidebb lesz a rövidebbik ropi hossza? Könnyen látható, hogy az l hosszúságú ropin ha a bal $\frac{l}{4}$ részén vagy ha a jobb $\frac{l}{4}$ részén lesz a törés, akkor a rövidebbik rész hossza kisebb lesz $\frac{l}{4}$-nél. Az is könnyen látszódik, hogy ha a törés mindkét oldaltól legalább $\frac{l}{4}$ távol van, akkor a rövidebbik ropi hossza nagyobb lesz $\frac{l}{4}$-nél. X-szel jelölve a rövidebb ropi hosszát:

$$P(X < \frac{l}{4}) = \frac{2\frac{l}{4}}{l} = \frac{1}{2}$$

Általánosan, rögzített $x \in \left[0, \frac{l}{2}\right]$*-re pontosan akkor lesz a rövidebbik darab hossza kisebb* x*-nél, ha a törés helye az* l *hosszúságú ropin vagy 0 és* x *között van, vagy* $l - x$ *és* l *között. Ez két* x *hosszú szakasz, így:*

$$F(x) = P(X < x) = \frac{2x}{l}$$

Tetszőleges x*-re:*

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{2x}{l} & \textit{ha } x \in \left[0, \frac{l}{2}\right] \\ 1 & \textit{ha } x > \frac{l}{2} \end{array} \right\}$$

5. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? És ha 10 pontot választunk, mi a 6. eloszlásfüggvénye?
A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye?

$$F(x) = P(\textit{nagyság szerint 3. pont } < x) =$$
$$P(\textit{mind a négy pont } < x) + P(\textit{pontosan 3 pont } < x \textit{ és egy pont nagyobb } x\textit{-nél}) =$$
$$x^4 + \binom{4}{3} x^3(1-x) = x^4 - 4x^3(1-x)$$

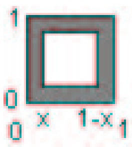
Ha $x \in [0,1]$*, egyébként 1, ha* $x > 1$ *és 0, ha* $x < 0$*.*
A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja:

$$f(x) = -12x^2 + 20x^3 \quad \textit{ha } x \in [0,1]\textit{, egyébként 0}$$

És ha 10 pontot választunk, mi a 6. eloszlásfüggvénye?
Az előzőek alapján:

$$F_2(x) = P(\textit{nagyság szerinti 6. pont} < x) =$$
$$1 - \sum_{k=0}^{5} P(\textit{pontosan k. pont} < x) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{10}{k} x^k (1-x)^{10-k}$$

6. Válasszunk az egységnégyzetben egyenletesen egy pontot. Jelölje X e pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg az X eloszlását! Mi annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint 1/4?
Rögzítsünk egy x *számot, és jelöljük be azon pontok halmazát, amelyek* x*-nél közelebb vannak valamelyik oldalhoz. Ezt elég könnyű megtenni, csak* x *távolságra párhuzamost kell húznunk minden egyes oldallal. A kérdéses síkidom egy keret lesz úgy, hogy egy* $(1-2x)(1-2x)$ *nagyságú négyzet fog a közepéből hiányozni. Így:*



1. ábra. A szürke terület pontjai vannak x-nél közelebb az oldalakhoz

$$F(x) = P(X < x) = 1 - (1 - 2x)(1 - 2x) = 4x(1 - x)$$

ha $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, *egyébként 1, ha* $x > \frac{1}{2}$ *és 0, ha* $x < 0$. *Annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint* $\frac{1}{4}$*:*

$$P(X > \frac{1}{4}) = 1 - P(X < \frac{1}{4}) = 1 - F(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$$

7. Egy távolsági busz egyenletes eloszlás szerintérkezik a megállóba, munkanapokon 13:00 és 13:15 között, hétvégén 13:00 és 13:10 között. Utazásaim 1/3-a hétvégére, 2/3-a hétköznapra esik. Mindig 13:00-ra érkezünk a buszmegállóba. Határozzuk meg a buszra várakozás eloszlását. Mi annak a valószínűsége, hogy kevesebb mint 5 percet kell várakoznunk?
Csak a percekkel számolok, hiszen mindig 13 órával számolunk. A hétköznapi és hétvégi eloszlás is egyenletes lesz, csak más paraméterekkel. Az alábbi képletek az eddigiek után úgy gondolom érthetőek.

$$F_{\textit{hétköznap}}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{x}{15} & \textit{ha } x \in [0, 15] \\ 1 & \textit{ha } x > 15 \end{array} \right\}$$

$$F_{\textit{hétvége}}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{x}{10} & \textit{ha } x \in [0, 10] \\ 1 & \textit{ha } x > 10 \end{array} \right\}$$

$$F(x) = P(X < x) \overset{\textit{(teljes valószínűség tétele)}}{=} P(\textit{hétköznap})P(X < x|\textit{hétköznap}) +$$
$$P(\textit{hétvége})P(X < x|\textit{hétvége}) = \frac{2}{3}F_{\textit{hétköznap}}(x) + \frac{1}{3}F_{\textit{hétvége}}(x) =$$
$$F(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \textit{ha } x < 0 \\ \frac{2}{3}\frac{x}{15} + \frac{1}{3}\frac{x}{10} & \textit{ha } x \in [0, 10) \\ \frac{2}{3}\frac{x}{15} & \textit{ha } x \in [10, 15] \\ 1 & \textit{ha } x > 15 \end{array} \right\}$$

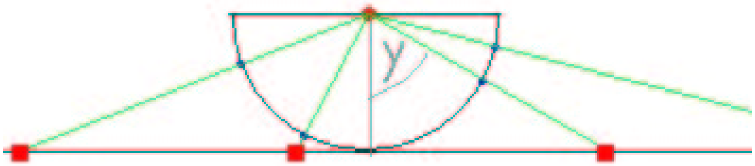
A sűrűségfüggvényhez csak deriválnunk kell:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{7}{90} & \textit{ha } x \in [0, 10) \\ \frac{2}{45} & \textit{ha } x \in [10, 15] \\ 0 & \textit{egyébként} \end{array} \right\}$$

Mi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 5 percet várunk?

$$P(X < 5) = F(5) = \frac{2}{3}\frac{5}{15} + \frac{1}{3}\frac{5}{10} = \frac{7}{18}$$

8. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1, 1)$ intervallumba esik? *(Az így kapott eloszlás a Cauchy eloszlás)*
Az eloszlásról egy interaktív prezentáció található Vetier tanár úr honlapján az a rész alatt, ahol feltüntette, hogy XP és új Internet Explorer szükséges.
Az alábbi ábra mutatja, hogy miről van szó. A félköríven egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot (ezek a kis kék pontok), majd a kör középpontjából levetítjük őket (ezek a zöld egyenesek), majd megnézzük a metszéspontot a számegyenessel (ezek lesznek a nagy piros négyzetek). A levetített pontok (piros négyzetek) eloszlását hívjuk Cauchy eloszlásnak. Választunk egy pontot az egyenletesen a félköríven. A kör középpontjából



2. ábra. Cauchy eloszlás

nézve szöget rendelhetünk ezekhez a pontokhoz. Jelöljük Y-nal a ezt a szöget úgy, ahogyan az ábrán látható (figyelem, ez a szög itt lehet negatív is). Így Y egyenletes eloszlású lesz $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$-n. X-szel jelölve a levetített pontot igaz lesz, hogy $X = \tan(Y)$ (a számegyenes origója az érintkezési pont). A kérdéses eloszlásfüggvény:

$$F(x) = P(X < x) = P(\tan(Y) < x) \overset{(\textit{mivel arctan mon. nő})}{=} P(Y < \arctan(x))$$

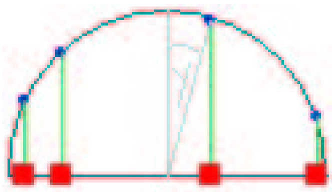
Ez igaz, hiszen ha van két számom, pl: 2 és 3, és igaz, hogy $2 < 3$, akkor egy szigorúan monoton növekvő függvényt alkalmazva mindkét oldalon, például $3x+10$-et, akkor továbbra is igaz lesz, hogy $3 \cdot 2+10 < 3 \cdot 3+10$. Ezt csináltuk most is, az arctangenst alkalmaztuk mindkét oldalon. Y eloszlásfüggvényét ismerjük, így:

$$P(Y < \arctan(x)) = \frac{\arctan(x) - (-\pi/2)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x)}{\pi}$$

A sűrűségfüggvényhez deriválnunk kell:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

9. Egyenletesen választunk egy pontot a egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0.5, 0.5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az Arcussinus-eloszlás)*
Ismételten tanár úr honlapját tudom ajánlani. Úgy gondolom a feladat nyilvánvaló, a piros négyzetek eloszlását kell meghatározni. Y szög legyen az ábra szerint (itt is lehet Y negatív is). Az Y eloszlása egyenletes lesz a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$-n. X-szel jelölve a levetített pont képét $X = \sin(Y)$. Az előző feladathoz hasonlóan:



3. ábra. Arcsinusz eloszlása

$$F(x) = P(X < x) = P(\sin(Y) < x) \overset{(\textit{mivel arcsin mon. nő } (-\pi/2,\pi/2)\textit{-n})}{=} P(Y < \arcsin(x)) =$$
$$\frac{\arcsin(x) - (-\frac{\pi}{2})}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\arcsin(x)}{\pi}$$

A sűrűségfüggvény:

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}$$

A kérdésekre a válasz:

$$P(\textit{a pont a (-0.5,0.5) intervallumba esik}) = P(X < 0.5) - P(X < -0.5) = F(0.5) - F(-0.5) = \frac{1}{3}$$

$$P(X < 0) = F(0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X < \frac{\sqrt{3}}{2}) = F(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{3}$$

10. Egyenletesen választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$? És ha a pontunkat a $[0, 1]$-ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? Mi lesz a várható értéke? Milyen x-re lesz $F(x) = 0.5$? *(Azt az x számot, melyre $P(X < x) = 0.5$ az X valószínűségi változó mediánjánal nevezzük. Hasonlítsuk össze a várható értékkel!)*
Az eddigiek alapján úgy érzem, hogy megoldható. Az utolsó részben $F(x) = 0.5$-öt kell megoldani.

11. Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a következő t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?
A feladat egyszerű: megadták az eloszlásfüggvényt.

$$P(\textit{>10 percet várunk}) = P(X > 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-8\cdot 10}) = e^{-80}$$

$$P(\textit{legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et}) = P(X < 10) - P(X < 5) = F(10) - F(5) = e^{-80} - e^{-40}$$

Számoljuk ki a sűrűségfüggvényt!

$$f(x) = 8e^{-8t} \qquad \textit{ha x>0, egyébként 0}$$

A várható érték (az integrált parciálisan kell kiszámolni):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_{0}^{\infty} t \cdot 8e^{-8t} = \frac{1}{8}$$

$$P(\textit{sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet}) \overset{\textit{feltételes valószínűség}}{=}$$
$$\frac{P(X > 4 \textit{ és } X > 14)}{P(X > 4)} = \frac{P(X > 14)}{P(X > 4)} = \frac{1 - P(X < 14)}{1 - P(X < 4)} = \frac{e^{-112}}{e^{-32}} = e^{-80}$$

Azt számoltuk ki, hogy e^{-80} annak a valószínűsége, hogy 10 percen belül nem jön busz. Ha már vártam valamennyi időt, és tudva, hogy addig nem jött, akkor újabb 10 percre nézve ismét ugyanannyi lesz a valószínűség. Ez általában nics így. Az itt leírt eloszlást 8 paraméterű Exponenciális eloszlásnak nevezzük, és az Exponenciális eloszlások mindig rendelkeznek ezzel az örökifjú tulajdonsággal.

12. Legyen X^2 egyenletes a $[0, 1]$-en. Mi lesz X eloszlása? Mi a mediánja, várható értéke?
Az eddigiekből könnyen kiszámolható.

13. Egy alkatrész napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án (a születésnapomon) hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik alkatrészt érdemesebb megvenni? Azt, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$, ha $x > 1$, vagy ezt? Átlagosan mennyit bír a kétféle minőségű alkatrész?
Az eddigiekből könnyen kiszámolható. A melyik alkatrészt érdemesebb megvenni kérdésnél várható értéket kell számolni, és természetesen a nagyobb várható értékűt kell megvenni.