

Matematika B4

VIII. gyakorlat

2005. november 2.

1. Exponenciális eloszlás

Egy valószínűségi változó örökifjú tulajdonságú, ha teljesül rá a következő: $\mathbb{P}(X > a + b | X > a) = \mathbb{P}(X > b)$. Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó tárgy "él", a további jövőjét illetően esélyei olyanok, mint egy "újszülött" tárgynak.

Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.

Megjegyzés

Egy X eloszlásról azt mondhatjuk, hogy öregedik, ha $\mathbb{P}(X > a + b | X > a) < \mathbb{P}(X > b)$ teljesül rá. *Példa:* egy elhasznált alkatrész élettartama.

Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy fiatalodik, amennyiben $\mathbb{P}(X > a + b | X > a) > \mathbb{P}(X > b)$. *Példa:* a Voronyezsből szökő katona milyen messzire tud eljutni a fronttól.

2. Szórás

Az m várható értékű diszkrét valószínűségi változó szórása: $\sigma = \sqrt{\sum_k (k - m)^2 \cdot p_k}$.

Folytonos esetben: $\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot f(x) dx}$

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\mathbb{P}(X < x) = F(x) = 1 - e^{-x^2} \quad \text{ha } x \geq 0$$

$$\mathbb{P}(Y < y) = G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}} \quad \text{ha } y \geq 0$$

eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!

Megoldás: Első esetben: $\mathbb{P}(X > a + b | X > a) = \frac{e^{-(a+b)^2}}{e^{-a^2}} = e^{-b^2 - 2ab} < e^{-b^2} = \mathbb{P}(X > b)$, így a definíció szerint ez öregedő.

Második esetben: $\mathbb{P}(X > a + b | X > a) = \frac{e^{-\sqrt{a+b}}}{e^{-\sqrt{a}}} > e^{-\sqrt{b}} = \mathbb{P}(X > b)$, mivel keresztbe szorozva és kihasználva e^x szigorú monoton növekedését, ez ekvivalens $-\sqrt{a+b} > -\sqrt{a} - \sqrt{b}$ -vel, ami négyzetreemeléssel könnyen ellenőrizhető. Így a definíció szerint ez fiatalodó.

2. Számítsuk ki a λ paraméterű exponenciális eloszlást követő X valószínűségi változó szórását és a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését! Mennyi a medián, az alsó és a felső kvartilis, illetve általában a p -kvantilis értéke (Az F eloszlásfüggvényű eloszlás p -kvantilise az az x , amelyre $F(x) = p$; a medián és a kvartilisek ennek speciális esetei rendre $p = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ értékekkel)?

Megoldás: $m = EX = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \dots = \frac{1}{\lambda}$, egy parciális integrálással.

$EX^2 = \int x^2 f(x) dx = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \dots = \frac{2}{\lambda^2}$, két parciális integrálással (vagy egy parciális integrálással visszavezetjük EX -re).

Így a szórásnégyzet: $\sigma^2 = D^2 X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

A várható érték $\frac{1}{\lambda}$, így az átlagos eltérés: $\int |x - m| f(x) dx = 2 \int_0^m (m - x) f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (\frac{1}{\lambda} - x) \lambda e^{-\lambda x} dx = \dots = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{e}$.

x -ben p -kvantilise van az eloszlásnak, ha $F(x)=p$, esetünkben $1 - e^{-\lambda x} = p$, ebből $x = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{1-p}$.

Így a mediánja: $\frac{1}{\lambda} \ln 2$.

Így az alsó kvartilise: $\frac{1}{\lambda} \ln \frac{4}{3}$.

Így a felső kvartilise: $\frac{1}{\lambda} \ln 4$.

3. Számítsuk ki az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást követő X valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!

Megoldás: $m = EX = \int x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$.

$EX^2 = \int x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$.

Így a szórásnégyzet: $\sigma^2 = D^2 X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$.

A várható érték $\frac{a+b}{2}$, így az átlagos eltérés: $\int |x - m| f(x) dx = 2 \int_a^m (m - x) f(x) dx =$

$2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} (\frac{a+b}{2} - x) \frac{1}{b-a} dx = \dots = \frac{b-a}{4}$.

4. Számítsuk ki az $f(x) = 2x$ ha $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényt követő X valószínűségi változó megadott valószínűségi változó szórását és átlagos abszolút eltérését!

Megoldás: $m = EX = \int x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$.

$EX^2 = \int x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Így a szórásnégyzet: $\sigma^2 = D^2 X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}$.

A várható érték $\frac{2}{3}$, így az átlagos eltérés: $\int |x - m| f(x) dx = 2 \int_0^m (m - x) f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{2}{3}} (\frac{2}{3} - x) 2x dx = \dots = (\frac{2}{3})^4$.

5. Mennyi az előző 3 feladatban a következő valószínűségek értéke (m , σ és d a várható értéket, a szórás illetve az átlagos abszolút eltérést jelöli)?

a) $\mathbb{P}(m - \sigma < X < m + \sigma)$

b) $\mathbb{P}(m - d < X < m + d)$

c) $\mathbb{P}(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$

d) $\mathbb{P}(m - 2d < X < m + 2d)$

Megoldás: Erre nekem nincs kapacitásom... HF

6. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

Megoldás: Az eloszlásfüggvény: $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{3}x}$.

Annak a valószínűsége, hogy több mint 5 percig kell várnom: $P(X > 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = e^{-\frac{1}{3}5} = e^{-\frac{5}{3}}$.

Annak a valószínűsége, hogy több mint 7 percig kell várnom, ha már két perce beszél (azaz a beszélgetés hossza nagyobb mint 2): $P(X > 7 | X > 2) = \frac{P(X > 7)}{P(X > 2)} = \frac{1 - F(7)}{1 - F(2)} = \frac{e^{-\frac{1}{3}7}}{e^{-\frac{1}{3}2}} = e^{-\frac{5}{3}}$.

7. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

Megoldás: Legyen az exponenciális eloszlás paramétere λ . Az eloszlásfüggvény: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. A feladat szerint $F(1000) = 0.02$, azaz $1 - e^{-\lambda 1000} = 0.02$, amiből $\lambda = \frac{-\ln 0.98}{1000}$.

A kérdés $P(X > m) = ?$

Kiszámoltuk (2. feladatban), hogy $m = \frac{1}{\lambda}$. Így $P(X > m) = 1 - P(X < m) = 1 - F(m) = 1 - F(\frac{1}{\lambda}) = e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = e^{-1}$.

8. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

Megoldás: Legyen az exponenciális eloszlás paramétere λ . Az eloszlásfüggvény: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. A feladat szerint $F(2000) = \frac{1}{3}$, azaz $1 - e^{-2000\lambda} = \frac{1}{3}$, amiből $\lambda = \frac{-\ln \frac{2}{3}}{2000}$.

Legyen annak a valószínűsége p , hogy egy adott égő világít 200 óra után. Ekkor $p = P(X > 200) = 1 - F(200) = e^{-200\lambda}$. Így annak a valószínűsége, hogy 200-ból 150 világít (binomiális): $\binom{200}{150} p^{150} (1-p)^{50}$.

9. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

Megoldás:

$$m = EX = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}.$$

$$EX^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = \frac{91}{6}.$$

$$\sigma^2 = D^2 X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Általánosan - " n oldalú kockával":

$$m = EX = \frac{1+2+3+\dots+n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

$$EX^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sigma^2 = D^2 X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = (n+1) \cdot \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4}\right) = (n+1) \cdot \frac{4n+2-3n-3}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}.$$

10. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?

Megoldás: Ez egy hipergeometrikus eloszlás, így annak a valószínűsége, hogy k piros golyót húzunk ki:

$$p_k = \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{6}{3-k}}{\binom{10}{3}}.$$

Konkréten: $p_0 = \frac{1}{6}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{3}{10}$, $p_3 = \frac{1}{30}$.

$$\text{Így } m = EX = \sum k \cdot p_k = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{6}{5}.$$

$$EX^2 = \sum k^2 \cdot p_k = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{1}{30} = 2.$$

$$\sigma^2 = D^2 X = EX^2 - (EX)^2 = 2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}.$$

11. Legyen $X_i (i = 1 \dots 4)$ valószínűségi változó p valószínűséggel 1, $1 - p$ valószínűséggel 0! Legyen $Y_j = \sum_{i=1}^j X_i (i = 1 \dots 4)$! Mennyi $Y_j (j = 1 \dots 4)$ szórása, illetve második momentuma $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$, illetve általános esetben?

Megoldás: Erre sincs kapacitásom... HF (nem nehéz csak 12 részfeladatból áll :)

12. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 óraker van találkozónk. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkorábbi időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik?

*Megoldás: Egyenletes eloszlásnál: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ (lásd 3. feladat).
Így $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = 5$ Amiből $b - a = 10\sqrt{3}$, tehát legfeljebb $10\sqrt{3} \approx 17.3$ percet késik.*