Matematika B4
IX. gyakorlat

2005. április 14.

1. Normális eloszlás

Tény: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ha $-\infty < x < \infty$,

eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ ha $-\infty < x < \infty$.

$X_1 + X_2 + \cdots + X_{12} - 6$ jól közelíti. (X_i a $[0,1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlású valószínűségi változó $i = 1, 2, \ldots 12$)
Az m várható értékű, σ szórású normális eloszlás a standard normálisból származtatható: $F(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$
Független, azonos eloszlású, véges szórású valószínűségi változók összege is normális eloszlást közelít.
Feladatok

1. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek?

   a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$

   Megoldás: Ez a standard normális sűrűsségfüggvényének integrálja, így értéke 1.

   b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)dx$

   Megoldás: Ez a standard normális várható értéke, így értéke 0.

   c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \varphi(x)dx$

   Megoldás: Ez a standard normális átlagos abszolút eltérése, értéke $2\int_0^\infty x \cdot \varphi(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

   d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x)dx$

   Megoldás: Ez a standard normális második momentuma, mivel m=0, így $EX^2 = \sigma^2 = 1$.

2. Bizonyítsuk be, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) \equiv 1$

   Megoldás: Tudjuk, hogy $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx$*, valamint* $\Phi(-x) = \int\limits_{-\infty}^{-x} \varphi(x)dx = \int\limits_{x}^{\infty} \varphi(x)dx$ *szimmetriaokokból.*
   Így $\Phi(-x) + \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx + \int\limits_{x}^{\infty} \varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$.

3. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!

   a) $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$

      Megoldás: $\Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0,6826$.

   b) $\mathbb{P}(-2 < X < 2)$

      Megoldás: $\Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0,9544$.

   c) $\mathbb{P}(-3 < X < 3)$

      Megoldás: $\Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1 \approx 0,9974$.

4. Számítsuk ki a standard normális eloszlás 0.9 és 0.2-kvantilisét!

   Megoldás: Táblázatból: 1.28 *illetve* -0.84

5. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm (normális eloszlásnak tekinthető). Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Most mennyi a 0.9 és 0.2-kvantilis?

   Megoldás: A feladat szerint $m = 178$, $\sigma = 9$. *Így* $P(169 < X < 187) = F(187) - F(169) = \Phi(\frac{187-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{169-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{187-178}{9}) - \Phi(\frac{169-178}{9}) = \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.68$.
   $P(X > 200) = 1 - F(200) = 1 - \Phi(\frac{200-m}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{200-178}{9}) = 1 - \Phi(\frac{22}{9}) \approx 0.007$.
   A kvantiliseket vissza kell transzformálni($\sigma \cdot x + m$*):* $x_1 \approx 1,28 \cdot 9 + 178 \approx 189,5$*, illetve*
   $x_2 \approx -0,84 \cdot 9 + 178 \approx 170,4$

6. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban

   a) 50 fő alatt

      Megoldás: A feladat szerint $m = 80$, $\sigma = 20$. *Így* $P(X < 50) = F(50) = \Phi(\frac{50-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{50-80}{20}) = \Phi(-\frac{3}{2}) \approx 0.0668$.

   b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?

      Megoldás: $P(80 < X < 100) = F(100) - F(80) = \Phi(\frac{100-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{80-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{100-80}{20}) - \Phi(\frac{80-80}{20}) = \Phi(1) - \Phi(0) \approx 0.3413$.

7. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?

   Megoldás:
   Egyenletes eloszlásnál:
   Mivel az egyenletes várható értéke 0, így $[-a, a]$ *intervallumon van értelmezve. Ennek szórása* $\sigma = \frac{2a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = 1$. *Ebből* $a = \sqrt{3}$. *És így* $P(X > \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}{2\sqrt{3}} \approx 0,35566$.

   Normális eloszlásnál:
   Standard normálisról van szó, így $P(X > \frac{1}{2}) = 1 - \Phi(\frac{1}{2}) \approx 0,3085$.

2. Centrális határeloszlás tétel

Egy véges szórásnégyzetű valószínűségi változóra sok független kísérletet végezve, majd az eredmények átlagának standardizáltját véve közelítőleg standard normális eloszlású valószínűségi változót kapunk.
Amennyiben az eredeti valószínűségi változóink: $X_1, X_2, \dots$ függetlenek és azonos eloszlásúak, melyeknek várható értéke $\mathbb{E}(X_k) = m$, szórásnégyzete $Var(X_k) = \sigma^2$, valamint az első n valószínűségi változó összege $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, a CHT a következőt mondja ki:
$\lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{VarS_n}} < x) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x) = \Phi(x)$
Emiatt elég nagy n esetén használhatjuk a Φ függvényt n független, azonos eloszlású valószínűségi változó konvolúciójából adódó eloszlás közelítésére.

Feladatok:

8. Számítsuk ki az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlás standardizáltját $n \to \infty$ esetén $p = 0.4$, $p = 0.02$, illetve $p = 0.96$ esetekben!
9. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik?
10. Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a fejek száma 490 és k közé esik, kb. 0.5!
11. Hányszor kell egy érmével dobnunk ahhoz, hogy 0.99-nál nagyobb valószínűséggel a fej eredmények száma a dobások számának 49%-a és 51%-a közé essen?
12. Egy északi sarki téli tábor irodájában kell folyamatosan világosságot biztosítani. Az izzók, amiket használnak exponenciális eloszlásúak 10 óra várható értékkel. Legalább hány ilyen izzóra van szükség ahhoz, hogy a 60 napra tervezett táborban legalább 0,9 valószínűséggel folyamatosan éghessen a villany? (Az izzócserék időtartama elhanyagolható.)
13. Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 10 petákot tesz ‘piros’-ra. 100 játék után 300 peták a vesztesége. Jogos-e a gyanúja, hogy svindliz a croupier? (A rulett-körön összesen 37 mező van 0-tól 36-ig számozva. Ezek közül egy (a 0 jelű) zöld, a fennmaradó 36-ból pedig 18 piros és 18 fekete.)
14. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab azonos eloszlású X valószínűségi változó összege a $[0, 30]$ intervallumba esik, ha X eloszlása a [0, 1] intervallumon
    a) egyenletes;
    b) $f(x) = 2x$ sűrűségfüggvény szerint alakul?
15. Adjon közelítő értéket arra, hogy mekkora valószínűséggel esik egy 100-adrendű, 3 paraméterű gamma eloszlású valószínűségi változó a $[30, 35]$ intervallumba!