Matematika A1

10. feladatsor

Határozattlan alakok és a L'Hospital-szabály

1. A L'Hospital segítségével számítsuk ki a határértéket.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$

   (d) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{\sin x-\cos c}{x-\pi/4}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x3^2+5}-3}{x^2-4}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$

2. Adjunk meg olyan c értéket, amelyre az

$$f(x)=\begin{cases} \frac{9x-3\sin 3x}{5x^3}, & x\neq 0 \\ c, & x=0 \end{cases}$$

   függvény folytonos lesz az $x=0$ helyen. Magyarázzuk meg, hogy miért jó az általunk adott c érték.

A Newton-módszer

3. Keressük meg a Newton-módszerrel az $x^2+x-1=0$ egyenlet közelítő megoldását. A bal oldali megoldást először közelítsük az $x_0=-1$ értékkel, a jobb oldali megoldást pedig az $x_0=1$ értékkel. Azután mindkét esetben keressük meg x_2-t is.

4. A Newton-módszert alkalmazva keressük meg az $x^3+3x+1=0$ egyenlet valós megoldásának közelítését. Legyen $x_0=0$, aztán keressük meg x_2-t.

5. A Newton-módszerrel adjunk becslést az $f(x)=x^4+x-3$ függvény két zérushelyére. A bal oldali zérushely esetén legyen $x_0=-1$, a jobb oldali zérushely esetén pedig $x_0=1$. Mindkét esetben határozzuk meg x_2-t.

6. Legyen $f(x)=3x-x^3$. Mutassuk meg, hogy az $f(x)=-4$ egyenletnek van megoldása a $[2,3]$ intervallumban , s a megoldás megkereséséhez használjuk a Newton-módszert.

Primitív függvények

7. Határozzuk meg a megadott függvények primitív függvényét.
   (a) $x^2 - 2x + 1$
   (b) $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$
   (c) $2 - \frac{5}{x^2}$
   (d) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$
   (e) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
   (f) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$
   (g) $-\pi \sin \pi x$
   (h) $3 \sin x$
   (i) $x^2 - 2x + 1$
8. Határozott integrálok
   (a) $\int (x+1)dx$
   (b) $\int (3x^2 + \frac{x}{2})dx$
   (c) $\int (1 - x^2 - 3x^5)dx$
   (d) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx$
   (e) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$
   (f) $\int \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2} dx$
   (g) $\int \frac{4+\sqrt{x}}{x^3} dx$
   (h) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$
   (i) $\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx$
   (j) $\int (2 + \operatorname{tg}^2 x)dx$
9. Helyes vagy helytelen? Indokoljuk válaszunkat.
   (a) $\int (2x+1)^2 dx = \frac{(2x+1)^3}{3} + C$
   (b) $\int 6(2x+1)^2 dx = (2x+1)^3 + C$
   (c) $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{x}{x+1} + C$
   (d) $\int \sqrt{2x+1} dx = \sqrt{x^2 + x} + C$
   (e) $\int (7x-2)^2 dx = \frac{(7x-2)^3}{28} + C$
   (f) $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$
10. Oldjuk meg a kezdetiérték-problémákat.
    (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{x^2}, \quad y(1) = -1$
    (b) $\frac{dy}{dx} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad y(1) = 1$

Integrálás

Közelítés véges összegekkel

11. Közelítsük a függvény alatti területet

- két azonos szélesség, alulról közelítő téglalappal!
- négy azonos szélesség, alulról közelítő téglalappal!
- két azonos szélesség, felülről közelítő téglalappal!
- négy azonos szélesség, felülről közelítő téglalappal!

(a) $f(x) = x^2$ az $x = 0$ és az $x = 1$ között.

(b) $f(x) = x^3$ az $x = 0$ és az $x = 1$ között.

(c) $f(x) = 1/x$ az $x = 1$ és az $x = 5$ között.

12. A mellékelt táblázat egy játékmozdony sebességadatait mutatja másodpercenként, 10 másodperc hosszú időintervallumban. Számítsuk ki a mozdony által megtett utat 10, egységnyi hosszúságú intervallumra való felosztással és

(a) bal oldali végpontokban vett függvényértékkel,

(b) jobb oldali végpontokban vett függvényértékkel számolva!

Idő (s)	**Sebesség** (cm/s)	**Idő** (s)	**Sebesség** (cm/s)
0	0	6	11
1	12	7	16
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

13. Kanyargós úton autózunk baráti társasággal egy olyan autóban ülve, amelynek sebességmérője működik ugyan, azonban a megtett távolságot nem mutatja. Meg akarjuk tudni, milyen hosszú ez a kanyargós szakasz, ezért 10 másodperces időközökben feljegyezzük a kocsi sebességét. A mérési eredményeket a mellékelt táblázat tartalmazza. Becsüljük meg az útszakasz hosszát

(a) bal oldali végpontokhoz tartozó értékekkel,

(b) jobb oldali végpontokhoz tartozó értékekkel!

Idő (s)	**Sebesség** (m/s)	**Idő** (s)	**Sebesség** (m/s)
0	0	70	5
10	15	80	7
20	5	90	11
30	11	100	15
40	10	110	10
50	15	120	11
60	11		

Riemann-összeg téglalapjai

14. Rajzoljuk fel az $f(x)$ függvény grafikonját az adott intervallumban! Osszuk fel az intervallumot négy, azonos hosszúságú részintervallumra! Azután rajzoljuk be az ábrába a $\sum_{k=1}^{4} f(c_k)$ Riemann-összeghez tartozó téglalapokat, ahol c_k a k-adik részintervallum (a) bal oldali, (b) jobb oldali végpontja, (c) felező pontja! (Mindegyik Riemann-összeghez készítsünk külön ábrát!)

    (a) $f(x) = x^2 - 1$, a $[0, 2]$ intervallumon.

    (b) $f(x) = -x^2$, a $[0, 1]$ intervallumon.

    (c) $f(x) = \sin x$, a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.

15. Az alábbi $f(x)$ függvényekre írjuk fel a felső közelítő összeget oly módon, hogy az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő részintervallumra osztjuk fel! Azután vegyük ezeknek az összegeknek a határértékét $n \to \infty$ esetén, és számítsuk ki az $[a, b]$ intervallumhoz tartozó görbe alatti területet!

    (a) $f(x) = 1 - x^2$ a $[0, 1]$ intervallumban.

    (b) $f(x) = x + x^2$ a $[0, 1]$ intervallumban.

Az integrál, mint határérték

16. Fejezzük ki a határértéket, mint a függvény határozott integrálját!

    (a) $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 \Delta x_k$, ahol P a [0,2] egy felosztása.

    (b) $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} \Delta x_k$, ahol P a [1,4] egy felosztása.

    (c) $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$, ahol P a [0,1] egy felosztása.

    (d) $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos c_k} \Delta x_k$, ahol P a $[-\pi/4, 0]$ egy felosztása.