Matematika A1

10. feladatsor

Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály

1. A L'Hospital segítségével számítsuk ki a határértéket.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$
   Megoldás: 5

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x}$
   Megoldás: 0

   (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$
   Megoldás: 5/7

   (d) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{\sin x-\cos c}{x-\pi/4}$
   Megoldás: $\sqrt{2}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$
   Megoldás: 1/6

   (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
   Megoldás: ∞

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}\right)$
   Megoldás: 1

2. A L'Hospital-szabály segítségével határozzuk meg az alábbi a_n sorozatok határértékét.

   (a) $a_n = \frac{n^2+5}{n^2+3n+1}$
   Megoldás: 1

   (b) $a_n = n^2 \sin \frac{4}{n}$
   Megoldás: 4

3. Adjunk meg olyan c értéket, amelyre az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x-3\sin 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos lesz az $x = 0$ helyen. Magyarázzuk meg, hogy miért jó az általunk adott c érték.
Megoldás: $c = 27/10$

A Newton-módszer

4. Keressük meg a Newton-módszerrel az $x^2 + x - 1 = 0$ egyenlet közelítő megoldását. A bal oldali megoldást először közelítsük az $x_0 = -1$ értékkel, a jobb oldali megoldást pedig az $x_0 = 1$ értékkel. Azután mindkét esetben keressük meg x_2-t is.
Megoldás: $x_2 = -5/3; 13/21$

5. A Newton-módszert alkalmazva keressük meg az $x^3 + 3x + 1 = 0$ egyenlet valós megoldásának közelítését. Legyen $x_0 = 0$, aztán keressük meg x_2-t.
Megoldás: $x_2 = -29/90$

6. A Newton-módszerrel adjuk becslést az $f(x) = x^4 + x - 3$ függvény két zérushelyére. A bal oldali zérushely esetén legyen $x_0 = -1$, a jobb oldali zérushely esetén pedig $x_0 = 1$. Mindkét esetben határozzuk meg x_2-t.
Megoldás: $x_2 = -51/31; 5763/4945$

7. Legyen $f(x) = 3x - x^3$. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = -4$ egyenletnek van megoldása a $[2, 3]$ intervallumban , s a megoldás megkereséséhez használjuk a Newton-módszert.
Megoldás: $x_5 = 2.195823345$

Primitív függvények

8. Határozzuk meg a megadott függvények primitív függvényét.
   (a) $x^2 - 2x + 1$
   Megoldás: $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$

   (b) $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$
   Megoldás: $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x^2}$

   (c) $2 - \frac{5}{x^2}$
   Megoldás: $2x + \frac{5}{x}$

   (d) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$
   Megoldás: $\sqrt{x^3}$

   (e) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
   Megoldás: $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$

   (f) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$
   Megoldás: $x^{4/3}$

(g) $-\pi \sin \pi x$
Megoldás: $\cos(\pi x)$

(h) $3 \sin x$
Megoldás: $-3 \cos x$

9. Határozatlan integrálok

(a) $\int (x+1)dx$
Megoldás: $\frac{x^2}{2} + x + C$

(b) $\int (3x^2 + \frac{x}{2})dx$
Megoldás: $x^3 + \frac{x^2}{4} + C$

(c) $\int (1 - x^2 - 3x^5)dx$
Megoldás: $x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{2} + C$

(d) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx$
Megoldás: $2/3x^{3/2} + 3/4x4/3 + C$

(e) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$
Megoldás: $1/3\sqrt{x}(2+x) + C$

(f) $\int \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2} dx$
Megoldás: $2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$

(g) $\int \frac{4+\sqrt{x}}{x^3} dx$
Megoldás: $-\frac{2}{x^2} - \frac{2}{3x^{3/2}}$

(h) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$
Megoldás: $-1/2 \cos 2x + \operatorname{ctg} x + C$

(i) $\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx$
Megoldás: $x/2 + \frac{\sin 4x}{8} + C$

(j) $\int (2 + \operatorname{tg}^2 x)dx$
Megoldás: $x + \operatorname{tg} x + C$

10. Helyes vagy helytelen? Indokoljuk válaszunkat.

(a) $\int (2x+1)^2 dx = \frac{(2x+1)^3}{3} + C$
Megoldás: Hibás

(b) $\int 6(2x+1)^2 dx = (2x+1)^3 + C$
Megoldás: Helyes

(c) $\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{x}{x+1} + C$
Megoldás: Hibás

(d) $\int \sqrt{2x+1}dx = \sqrt{x^2+x} + C$
Megoldás: Hibás

(e) $\int (7x-2)^2 dx = \frac{(7x-2)^3}{28} + C$
Megoldás: Hibás

(f) $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$
Megoldás: Helyes

11. Oldjuk meg a kezdetiérték-problémákat.

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{x^2}, \quad y(1) = -1$
Megoldás: $y = x - \frac{1}{x} - 1$

(b) $\frac{dy}{dx} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad y(1) = 1$
Megoldás: $y = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$

Integrálás

Közelítés véges összegekkel

12. Közelítsük a függvény alatti területet

- két azonos szélesség, alulról közelítő téglalappal!
- négy azonos szélesség, alulról közelítő téglalappal!
- két azonos szélesség, felülről közelítő téglalappal!
- négy azonos szélesség, felülről közelítő téglalappal!

(a) $f(x) = x^2$ az $x = 0$ és az $x = 1$ között.
Megoldás: 0.125; 0.21875; 0.625; 0.46875

(b) $f(x) = x^3$ az $x = 0$ és az $x = 1$ között.
Megoldás: 0.0625; 0.0140625; 0.5625; 0.390625

(c) $f(x) = 1/x$ az $x = 1$ és az $x = 5$ között.
Megoldás: 1.066667; 1.283333; 2.66667; 2.083333

13. A mellékelt táblázat egy játékmozdony sebességadatait mutatja másodpercenként, 10 másodperc hosszú időintervallumban. Számítsuk ki a mozdony által megtett utat 10, egységnyi hosszúságú intervallumra való felosztással és

(a) bal oldali végpontokban vett függvényértékkel,
(b) jobb oldali végpontokban vett függvényértékkel számolva!

Idő (s)	**Sebesség** (cm/s)	**Idő** (s)	**Sebesség** (cm/s)
0	0	6	11
1	12	7	16
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

Megoldás: 87 cm; 87 cm

14. Kanyargós úton autózunk baráti társasággal egy olyan autóban ülve, amelynek sebességmérője működik ugyan, azonban a megtett távolságot nem mutatja. Meg akarjuk tudni, milyen hosszú ez a kanyargós szakasz, ezért 10 másodperces időközökben feljegyezzük a kocsi sebességét. A mérési eredményeket a mellékelt táblázat tartalmazza. Becsüljük meg az útszakasz hosszát
   (a) bal oldali végpontokhoz tartozó értékekkel,
   (b) jobb oldali végpontokhoz tartozó értékekkel!

Idő (s)	**Sebesség** (m/s)	**Idő** (s)	**Sebesség** (m/s)
0	0	70	5
10	15	80	7
20	5	90	11
30	11	100	15
40	10	110	10
50	15	120	11
60	11		

Megoldás: 1150 m; 1260 m

Riemann-összeg téglalapjai

15. Rajzoljuk fel az $f(x)$ függvény grafikonját az adott intervallumban! Osszuk fel az intervallumot négy, azonos hosszúságú részintervallumra! Azután rajzoljuk be az ábrába a $\sum_{k=1}^{4} f(c_k)$ Riemann-összeghez tartozó téglalapokat, ahol c_k a k-adik részintervallum (a) bal oldali, (b) jobb oldali végpontja, (c) felező pontja! (Mindegyik Riemann-összeghez készítsünk külön ábrát!)
   (a) $f(x) = x^2 - 1$, a $[0, 2]$ intervallumon.
   (b) $f(x) = -x^2$, a $[0, 1]$ intervallumon.
   (c) $f(x) = \sin x$, a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.

16. Az alábbi $f(x)$ függvényekre írjuk fel a felső közelítő összeget oly módon, hogy az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő részintervallumra osztjuk fel! Azután vegyük ezeknek az összegeknek a határértékét $n \to \infty$ esetén, és számítsuk ki az $[a, b]$ intervallumhoz tartozó görbe alatti területet!
   (a) $f(x) = 1 - x^2$ a $[0, 1]$ intervallumban.
   Megoldás: $\frac{2}{3} + \frac{3n-1}{6n^2}$; 2/3

   (b) $f(x) = x + x^2$ a $[0, 1]$ intervallumban.
   Megoldás: $12 + \frac{27n+9}{2n^2}$; 12

Az integrál, mint határérték

17. Fejezzük ki a határértéket, mint a függvény határozott integrálját!

(a) $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 \Delta x_k$, ahol P a [0,2] egy felosztása.

Megoldás: $\int\limits_0^2 x^2 dx$

(b) $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} \Delta x_k$, ahol P a [1,4] egy felosztása.

Megoldás: $\int\limits_1^4 \frac{1}{x} dx$

(c) $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$, ahol P a [0,1] egy felosztása.

Megoldás: $\int\limits_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$

(d) $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos c_k} \Delta x_k$, ahol P a $[-\pi/4, 0]$ egy felosztása.

Megoldás: $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{\cos x} dx$