

Matematika A1

11. feladatsor

Integrálás

Newton-Leibnitz-tétel

1. Számítsuk ki az integrálok értékét!

(a) $\int_{-2}^0 (2x + 5) dx$
Megoldás: 6

(b) $\int_1^{32} x^{-6/5} dx$
Megoldás: $5/2$

(c) $\int_0^\pi (1 + \cos x) dx$
Megoldás: π

(d) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$
Megoldás: $-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}$

2. Az alábbi deriváltakat keressük meg

- az integrál kiszámításával és azt követő deriválással;
- az integrál közvetlen deriválásával!

(a) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^4} \sqrt{t} dt$
Megoldás: $4x^5$

(b) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt$
Megoldás: $2x \cos x$

(c) $\frac{d}{dx} \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
Megoldás: 1

Helyettesítéses integrálás

3. Számítsuk ki a határozatlan integrálok értékét és hozzuk őket a megszokott alakra!

(a) $\int \sin 3x dx, \quad u = 3x$
Megoldás: $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$

(b) $\int (1 - \cos \frac{x}{2})^2 \sin \frac{x}{2} dx, \quad u = 1 - \cos \frac{x}{2}$
Megoldás: $-5/2 \cos(x/2) + \cos x - 1/6 \cos(3x/2)$

(c) $\int \frac{9x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad u = 1 - x^3$
Megoldás: $-6(1 - x^3)^{1/2}$

(d) $\int \frac{1}{x^2} \cos^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad u = -\frac{1}{x}$

4. Számítsuk ki az integrálokat!

(a) $\int x \sqrt[4]{1-x^2} dx$
Megoldás: $-2/5(1-x^2)^{5/4} + C$

(b) $\int \sin(8x-5) dx$
Megoldás: $-1/8 \cos(8x-5) + C$

(c) $\int \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} dx$
Megoldás: $1/2 \sin^6(x/3) + C$

(d) $\int \frac{\sin(2x+1)}{\cos^2(2x+1)} dx$
Megoldás: $\frac{1}{2 \cos(2x+1)} + C$

(e) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} dx$
Megoldás: $2/3 \left(\frac{x-1}{x^5}\right)^{3/2} x^6$

5. A helyettesítési szabály segítségével számítsuk ki az integrálok értékeit!

(a) $\int_0^1 x^3(1+x^4)^3 dx$
Megoldás: $15/16$

(b) $\int_0^1 \frac{5x}{(4+x)^2} dx$
Megoldás: $1/8$

(c) $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$
Megoldás: $1/2$

(d) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3 \sin x}} dx$
Megoldás: 0

(e) $\int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$
Megoldás: $1/6$

Transzcendens függvények

6. Az $y = f(x)$ függvény képlete alapján határozzuk meg az f^{-1} inverz függvény képletét, és adjuk meg f^{-1} értelmezési tartományát és értékkészletét. Ellenőrzés gyanánt mindegyik feladatnál mutassuk meg, hogy $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

(a) $f(x) = x^5$
Megoldás: $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$; $D : (-\infty, \infty)$; $R : (-\infty, \infty)$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$
Megoldás: $f^{-1}(x) = 2x + 7$; $D : (-\infty, \infty)$; $R : (-\infty, \infty)$

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$
Megoldás: $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $D : (0, \infty)$; $R : (0, \infty)$

7. Legyen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1, x \geq 2$! Határozzuk meg df^{-1}/dx értékét az $x = -1 = f(3)$ helyen!
Megoldás: $1/9$

8. Legyen $f(x) = x^2 - 4x - 5, x > 2$! Határozzuk meg df^{-1}/dx értékét az $x = 0 = f(5)$ helyen!
Megoldás: $1/6$

A logaritmusfüggvény

9. Fejezzük ki a logaritmikusokat $\ln 2$ és $\ln 3$ segítségével!

(a) $\ln 0.75$
Megoldás: $\ln 3 - 2 \ln 2$

(b) $\ln 3\sqrt{2}$
Megoldás: $\ln 3 + 1/2 \ln 2$

(c) $\ln \sqrt[3]{9}$
Megoldás: $2(\ln 2 - \ln 3)$

10. Egyszerítsük az alábbi kifejezéseket!

(a) $\ln(8x + 4) - 2 \ln 2$
Megoldás: $\ln(1 + 2x)$

(b) $3 \ln \sqrt[3]{t^2 - 1} - \ln(t + 1)$
Megoldás: $\ln(t - 1)$

11. Adjuk meg az y deriváltját!

(a) $y = \ln x^3$
Megoldás: $3/x$

(b) $y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$
Megoldás: $\frac{1 + \ln x + \ln^2 x}{(1 + \ln x)^2}$

(c) $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$
Megoldás: $\frac{1}{4x \sqrt{\ln \sqrt{x}}}$

12. Határozzuk meg az integrálokat!

(a) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{2-\cos x} dx$

Megoldás: $\ln 3$

(b) $\int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$

Megoldás: $\sqrt{\ln 2}$

(c) $\int_0^{\pi/12} 6\operatorname{tg} 3x dx$

Megoldás: $\ln 2$

13. A logaritmikus deriválás módszerével adjuk meg y deriváltját!

(a) $y = \sqrt{x(x+1)}$

Megoldás: $\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}$

(b) $y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}$

Megoldás: $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}} \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{3(x+1)} \right)$

(c) $y = \frac{x+5}{x \cos x}$

Megoldás: $\frac{x+5}{x \cos x} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x} + \operatorname{tg} x \right)$

Az exponenciális függvény

14. Fejezzük ki y -t!

(a) $\ln(1-2y) = x$

Megoldás: $\frac{1-e^x}{2}$

(b) $\ln(y^2-1) - \ln(y+1) = \ln(\sin x)$

Megoldás: $\sin x + 1$

(c) $100e^{10y} = 200$

Megoldás: $1/10 \ln 2$

(d) $e^{\sqrt{y}} = x^2$

Megoldás: $4(\ln x)^2$

15. Határozzuk meg az y deriváltját!

(a) $y = e^{4\sqrt{x}+x^2}$

Megoldás: $e^{4\sqrt{x}+x^2} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 2x \right)$

(b) $y = xe^x - e^x$

Megoldás: xe^x

(c) $y = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$
Megoldás: $1/(1+e^x)$

16. Határozzuk meg az integrálokat!

(a) $\int x^3 e^{x^4} dx$
Megoldás: $\frac{e^{x^4}}{4} + C$

(b) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$
Megoldás: $-e^{1/x} + C$

(c) $\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2xe^{x^2} \cos(e^{x^2}) dx$
Megoldás: $-\sin 1$

17. Határozzuk meg a sorozatok határértékét!

(a) $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$
Megoldás: $e^{2/3}$

(b) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$
Megoldás: 1

Általános hatványkifejezések

18. A logaritmikus deriválás módszerével határozzuk meg y deriváltját!

(a) $y = (x+1)^x$
Megoldás: $(x+1)^x \left(\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)\right)$

(b) $y = x^{\sqrt{x}}$
Megoldás: $1/2x^{-1/2+\sqrt{x}}(2 + \ln x)$

(c) $y = (\ln x)^{\ln x}$
Megoldás: $\frac{(\ln x)^{\ln x} (1 + \ln(\ln x))}{x}$

19. Határozzuk meg az integrálokat!

(a) $\int_0^1 2^{-x} dx$
Megoldás: $\frac{1}{2 \ln 2}$

(b) $\int_2^4 x^{2x} (1 + \ln x) dx$
Megoldás: 32760

(c) $\int_1^e \frac{2 \ln 10 \log_{10} x}{x} dx$
Megoldás: 1