

# Matematika A1

## 12. feladatsor

### Inverz trigonometrikus függvények

1. Határozzuk meg a függvényértékeket!

(a)  $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

**Megoldás:**  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(b)  $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

**Megoldás:** 1

(c)  $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$  (A megoldás *nem*  $-\pi/4$ )

**Megoldás:**  $\frac{3\pi}{4}$

2. Egyszerűsítsük a trigonometrikus kifejezéseket!

(a)  $\operatorname{tg}(\arccos x)$

**Megoldás:**  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(b)  $\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 2x}), \quad x \geq 2$

**Megoldás:**  $\frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1}$

(c)  $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$

**Megoldás:**  $\frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}}$

(d)  $\cos\left(\arcsin \frac{y}{5}\right)$

**Megoldás:**  $\sqrt{1 - x^2/25}$

3. Határozzuk meg az  $y$  deriváltját!

(a)  $y = \arccos(x^2)$

**Megoldás:**  $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

(b)  $y = \arcsin \frac{3}{x^2}$

**Megoldás:**  $\frac{-6}{x^3 \sqrt{1 - \frac{9}{x^4}}}$

(c)  $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$

**Megoldás:**  $\frac{1}{(\operatorname{tg}^{-1} x)(1+x^2)}$

(d)  $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$   
**Megoldás:**  $\arcsin x$

4. Határozzuk meg az integrálokat!

(a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$   
**Megoldás:**  $\arcsin \frac{x}{3} + C$

(b)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}}$   
**Megoldás:**  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \left| \frac{\sqrt{2}}{5x} \right| + C$

(c)  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+3x^2}$   
**Megoldás:**  $\pi/16$

(d)  $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$   
**Megoldás:**  $\pi/12$

(e)  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$   
**Megoldás:**  $\arccos \left| \frac{1}{x+1} \right| + C$

(f)  $\int \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$   
**Megoldás:**  $1/3 (\arcsin(x)^3) + C$

(g)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2}$   
**Megoldás:**  $2/3(\operatorname{arctg} x)^{3/2} + C$

## Hiperbolikus függvények

5. Egyszerűsítsük a kifejezéseket! Első lépésben írjuk fel a hiperbolikus függvényeket exponenciálisok segítségével!

(a)  $2\operatorname{ch}(\ln x)$   
**Megoldás:**  $x + 1/x$

(b)  $\operatorname{ch} 3x - \operatorname{sh} 3x$   
**Megoldás:**  $e^{-3x}$

(c)  $\ln(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) + \ln(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$   
**Megoldás:** 0

6. Deriváljuk a függvényeket!

(a)  $y = 6\operatorname{sh} \frac{x}{9}$   
**Megoldás:**  $2\operatorname{ch} \frac{x}{3}$

(b)  $y = \ln(\operatorname{sh} x)$   
**Megoldás:**  $\operatorname{cosh} x / \operatorname{sinh} x$

(c)  $y = \operatorname{arsh} \sqrt{x}$   
**Megoldás:**  $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$

(d)  $y = \operatorname{arsh}(\operatorname{tg} x)$   
**Megoldás:**  $|\frac{1}{\cos x}|$

7. Határozzuk meg az integrálokat!

(a)  $\int \operatorname{sh} 2x dx$   
**Megoldás:**  $\frac{\operatorname{ch} 2x}{2} + C$

(b)  $\int 4\operatorname{ch}(3x - \ln 2) dx$   
**Megoldás:**  $4/3\operatorname{sh}(3x - \ln 2)$

(c)  $\int_0^{\ln 2} \operatorname{th} x dx$   
**Megoldás:**  $\ln 5/4$

(d)  $\int_0^{\ln 2} 4e^{-x} \operatorname{sh} x dx$   
**Megoldás:**  $\ln 4 - 3/4$

(e)  $\int_1^4 \frac{8\operatorname{ch} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$   
**Megoldás:**  $-16(\operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh} 2)$

8. Számítsuk ki az integrálokat

- az inverz hiperbolikus függvények,
- a természetes logaritmus

segítségével!

(a)  $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$   
**Megoldás:**  $\ln(\sqrt{3} + 2)$

(b)  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$   
**Megoldás:**  $\operatorname{arth}(1/2)$

(c)  $\int_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$   
**Megoldás:** 0

# Integrálási technikák

## Egyszerű integrációs formulák

9. Megfelelő helyettesítés segítségével végezzük el az integrálást!

(a)  $\int \frac{3 \cos x dx}{\sqrt{1+3 \sin x}}$

**Megoldás:**  $2\sqrt{1+3 \sin x} + C$

(b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

**Megoldás:**  $2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$

(c)  $\int \frac{\operatorname{ctg}(3+\ln x)}{x} dx$

**Megoldás:**  $\ln |\sin(3 + \ln x)|$

(d)  $\int_1^{e^{\pi/3}} \frac{dx}{x \cos(\ln x)}$

**Megoldás:**  $\ln(2 + \sqrt{3})$

10. Végezzük el az integrálásokat! Ahol szükséges, alkalmazzunk helyettesítést!

(a)  $\int_1^2 \frac{8dx}{x^2-2x+2}$  (Teljes négyzetté kiegészítés)

**Megoldás:**  $2\pi$

(b)  $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$  (Teljes négyzetté kiegészítés)

**Megoldás:**  $-\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\right) + C$

(c)  $\int \frac{4x^3-x^2+16x}{x^2+4} dx$  (Maradékos polinomosztás)

**Megoldás:**  $2x^2 - x + 2\arctg \frac{x}{2} + C$

(d)  $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  (Törtek szétválasztása)

**Megoldás:**  $\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

(e)  $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$  (1-gyel való szorzás)

**Megoldás:**  $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C$

(f)  $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx$  (Gyökjel eltüntetése)

**Megoldás:**  $\sqrt{2}$

11. Különböző átalakítások használatával számoljuk ki az integrálokat!

(a)  $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) \operatorname{ctg}(x + \ln x) dx$

**Megoldás:**  $\ln |\sin(x + \ln x)| + C$

(b)  $\int 3\text{sh}\left(\frac{x}{2} + \ln 5\right) dx$   
**Megoldás:**  $6\text{ch}(x/2 + \ln 5) + C$

(c)  $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$   
**Megoldás:**  $\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)$

### Parciális integrálás

12. Számítsuk ki az integrálokat!

(a)  $\int x^2 \cos x dx$   
**Megoldás:**  $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$

(b)  $\int (x^2 + x + 1)e^x dx$   
**Megoldás:**  $e^x(2 - x + x^2)$

(c)  $\int_0^1 2x \arcsin x^2 dx$   
**Megoldás:**  $\pi/2 - 1$

(d)  $\int e^{2x} \cos 3x dx$   
**Megoldás:**  $\frac{e^{2x}}{13}(3 \sin 3x + 2 \cos 3x) + C$

13. Számítsuk ki az alábbi integrálokat! Először alkalmazzunk helyettesítést, majd integráljunk parciálisan!

(a)  $\int e^{\sqrt{3x+9}} dx$   
**Megoldás:**  $2/3(\sqrt{3x+9}e^{\sqrt{3x+9}} - e^{\sqrt{3x+9}}) + C$

(b)  $\int \ln(x + x^2) dx$   
**Megoldás:**  $-2x + \ln(x + 1) + x \ln(x + 1)$

(c)  $\int \sin(\ln x) dx$   
**Megoldás:**  $1/2(x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)) + C$

### Racionális törtfüggvények integrálása

14. Parciális törtekre bontással végezzük el az integrálást!

(a)  $\int \frac{x+4}{x^2+5x-6} dx$   
**Megoldás:**  $1/7 \ln |(x+6)^2(x-1)^5| + C$

(b)  $\int \frac{x+3}{2x^3-8x} dx$   
**Megoldás:**  $1/16(5 \ln |x-2| - 6 \ln |x| + \ln |x+2|)$

(c)  $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

**Megoldás:**  $1/4 \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{x}{2(x^2-1)} + C$

(d)  $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

**Megoldás:**  $1/4 \left( \frac{2}{x+1} + \ln |x-1| + 3 \ln |x+1| \right)$

(e)  $\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2} dx$

**Megoldás:**  $\frac{2((4x^2+1)\operatorname{arctg}(2x)-1)}{8x^2+2}$

(f)  $\int \frac{x^4}{x^2-1} dx$

**Megoldás:**  $x + x^3/3 + 1/2 \ln |x-1| - 1/2 \ln |x+1|$

(g)  $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + \cos x - 2}$

**Megoldás:**  $1/3 \ln |\cos x + 2| - 1/3 \ln |\cos x - 1|$

(h)  $\int \frac{(x-2)^2 \operatorname{arctg} 2x - 12x^3 - 3x}{(4x^2+1)(x-2)^2} dx$

**Megoldás:**  $\frac{(\operatorname{arctg} 2x)^2}{4} - 3 \ln |x-2| + \frac{6}{x-2} + C$

## Trigonometrikus integrálok

15. Számoljuk ki a határozott integrálokat!

(a)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x dx$

**Megoldás:**  $4/3$

(b)  $\int_0^{\pi} 8 \sin^4 x \cos^2 x dx$

**Megoldás:**  $\pi/2$

(c)  $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} dx$

**Megoldás:**  $4$

(d)  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx$

**Megoldás:**  $2 \ln(1 + \sqrt{2})$

(e)  $\int_0^{\pi/4} 4 \operatorname{tg}^3 x dx$

**Megoldás:**  $2(1 - \ln 2)$

(f)  $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos 3x dx$

**Megoldás:**  $-2/5$

$$(g) \int_0^{\pi} \cos 3x \cos 4x dx$$

**Megoldás:** 0

## Trigonometrikus helyettesítések

16. Számítsuk ki az integrálokat!

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$

**Megoldás:**  $\ln|\sqrt{9+x^2}+x|+C$

$$(b) \int \sqrt{1-9x^2} dx$$

**Megoldás:**  $1/2x\sqrt{1-9x^2} + 1/6 \arcsin(3x)$

$$(c) \int \frac{\sqrt{x^2-49}}{x} dx, \quad x > 7$$

**Megoldás:**  $7\left(\frac{\sqrt{x^2-49}}{7} - \operatorname{arcsec}\frac{x}{7}\right) + C$

$$(d) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

**Megoldás:**  $1/3(x^2+4)^{3/2} - 4\sqrt{x^2+4} + C$

$$(e) \int \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4} dx$$

**Megoldás:**  $-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3x^3}$

$$(f) \int_0^{\ln 4} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+9}}$$

**Megoldás:**  $\ln 9 - \ln(1 + \sqrt{10}) + C$

$$(g) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

**Megoldás:**  $\sqrt{x^2-1} + C$

**A**  $\operatorname{tg}(x/2) = z$  helyettesítés

Segítség:

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2 dz}{1+z^2}$$

17. Számoljuk ki az integrálokat.

$$(a) \int \frac{dx}{1-\sin x}$$

**Megoldás:**  $\frac{2}{1-\operatorname{tg}(x/2)} + C$

$$(b) \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sin x \cos x + \sin x}$$

**Megoldás:**  $1/4(\ln 3 - 2)$

$$(c) \int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$$

$$\text{Megoldás: } \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2) + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg}(x/2) + 1 + \sqrt{2}} \right| + C$$