Matematika A1

13. feladatsor

Az integrál alkalmazásai

Térfogatszámítás

1. Keressük meg a forgástest x-tengelyre merőleges síkmetszetének $A(x)$ képletét.
   (a) A test az x-tengelyre merőleges $x = -1$ és $x = 1$ síkok között helyezkedik el. A síkmetszetek minden esetben e két sík között, az x-tengelyre merőlegesen az $y = -\sqrt{1-x^2}$ félkörtől az $y = \sqrt{1-x^2}$ félkörig futnak.
      i. A síkmetszetek olyan körlapok, amelyek átmérője az xy-síkban van.
      ii. A síkmetszetek olyan négyzetek, amelyeknek egyik átlója az xy-síkban fekszik.
   (b) A test az x-tengelyre merőleges $x = 0$ és $x = 4$ síkok között helyezkedik el. A síkmetszetek minden esetben e két sík között, az x-tengelyre merőlegesen az $y = -\sqrt{x}$ parabolától az $y = \sqrt{x}$ paraboláig futnak.
      i. A síkmetszetek olyan négyzetek, amelyeknek egyik oldaléle az xy-síkban fekszik.
      ii. A síkmetszetek egyenlő oldalú háromszögek, alapjuk az xy-síkban fekszik.

2. Számítsuk ki a testek térfogatát!
   (a) A test az x-tengelyre merőleges $x = 0$ és $x = 4$ síkok között helyezkedik el. A tengelyre merőleges síkmetszetek a $0 \leq x \leq 4$ intervallumban olyan négyzetek, amelyek átlóinak végpontja az $y = -\sqrt{x}$ és az $y = \sqrt{x}$ parabolán van rajta.
   (b) A test alapja az $y = 2\sqrt{\sin x}$ görbe és az x-tengely $[0, \pi]$ intervalluma által közbezárt tartomány. Az x-tengelyre merőleges síkmetszetek egyenlő oldalú háromszögek, amelyeknek alapjainak végpontjai az x-tengelyen és a görbén futnak végig.

3. Határozzuk meg azoknak a forgástesteknek a térfogatát, amelyek az alább megadott egyenesek és görbék által meghatározott tartományok x-tengely körüli forgatásával jönnek létre!
   (a) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$
   (b) $y = \sqrt{9-x^2}$, $y = 0$
   (c) $y = \sqrt{\cos x}$, $0 \leq x \leq \pi/2$, $y = 0$, $x = 0$
   (d) $y = x$, $y = 1$, $x = 0$
   (e) $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$

4. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amely az $y = x^2$ parabola és az $y = 1$ egyenes által határolt tartomány
   (a) $y = 1$ egyenes,
   (b) $y = 2$ egyenes,
   (c) $y = -1$ egyenes

körüli forgatásával áll elő!

5. Héjmódszerrel határozzuk meg a megadott egyenesek és görbék által meghatározott tartományoka megadott tengely körüli forgatásával generált forgástest térfogatát!

    (a) $y = x$, $y = -x/2$, $x = 2$ az y-tengely körül

    (b) $y = x^2$, $y = 2 - x$, $x = 0$, $x \geq 0$ az y-tengely körül

    (c) $y = 2x - 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ az y-tengely körül

    (d) $x = \sqrt{y}$, $x = -y$, $y = 2$ az x-tengely körül

    (e) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$ az x-tengely körül

6. Számítsuk ki a megadott tartomány megadott tengely körüli forgatása révén keletkező forgástest térfogatát!

    (a) Az $(1, 1), (1, 2), (2, 2)$ csúcspontú háromszöget megforgatjuk

        i. az x-tengely

        ii. az y-tengely

        iii. az $x = 10/3$ egyenes

        iv. az $y = 1$ egyenes

        körül.

    (b) Az $x = y - y^3$ görbe és az y-tengely által határolt, az első síknegyedben fekvő tartományt megforgatjuk

        i. x-tengely

        ii. az $y = 1$ egyenes

        körül.

Ívhossz számítás

7. Számítsuk ki a görbék hosszát!

    (a) $x = 1 - t$, $y = 2 + 3t$, $-2/3 \leq t \leq 1$,

    (b) $x = t^2/2$, $y = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}$, $0 \leq t \leq 4$,

    (c) $x = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}$, $y = t + t^2/2$, $0 \leq t \leq 3$,

    (d) $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$, az $x =$ és $x = 3$ között,

    (e) $x = (y^3/3) + 1/(4y)$, $y = 1$ és $y = 3$ között, (*Útmutatás*: $a + (dx/dy)^2$ teljes négyzet.)

    (f) $y = (3/4)x^{4/3} - (3/8)x^{2/3} + 5$, $1 \leq x \leq 8$

Numerikus integrálás

8. Becsüljük meg az alábbi integrálokat a trapéz- és Simpson-formulával is!

    - A trapézformulát használva:
        - becsüljük meg az integrált $n = 4$ részintervallum használatával, és adjunk felső korlátot $|E_T|$-re,
        - számoljuk ki az integrál pontos értékét, utánna $|E_T|$ pontos értékét,
        - az $(|E_T|/(\text{pontos integrál}))\cdot 100$ képlettel határozzuk meg, hogy a hiba hány százaléka az integrálnak!

- A Simpson-formulát használva:
  - becsüljük meg az integrált $n = 4$ részintervallum használatával, és adjunk felső korlátot $|E_S|$-re,
  - számoljuk ki az integrál pontos értékét, utánna $|E_S|$ pontos értékét,
  - az $(|E_S|/(\text{pontos integrál}))\cdot 100$ képlettel határozzuk meg, hogy a hiba hány százaléka az integrálnak!

(a) $\int\limits_1^2 x dx$

(b) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2} dx$

(c) $\int\limits_0^\pi \sin x dx$

9. Az alapintervallumot 8 egyenlő részre osztottuk, és megadtuk a függvény értékeit az oszópontokban. Becsüljük meg az integrál értékét $n = 8$ mellett a trapézformulával, a Simpson-formulával, majd számoljuk ki az integrál pontos értékét, illetve az E_T és E_S hibákat!

(a) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$

x	$x\sqrt{1-x^2}$
0	0
0.125	0.12402
0.25	0.24206
0.375	0.34763
0.5	0.43301
0.625	0.48789
0.75	0.49608
0.875	0.42361
1	0

(b) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\cos x}{(2+\sin x)^2} dx$

x	$x\sqrt{1-x^2}$
-1.5708	0
-1.1781	0.99138
-0.7854	1.26906
-0.3927	1.05961
0	0.75
0.3927	0.48821
0.7854	0.28946
1.1781	0.13429
1.5708	0

10. Minimálisan hány részintervallumra kell osztanunk az alapintervallumoz, hogy **(i)** a trapézformula, **(ii)** a Simpson-formula hibája 10^{-4} alá csökkenjen az alábbi integrálok közelítő kiszámolásánál?

(a) $\int\limits_0^2 (x^3 + x) dx$

(b) $\int\limits_0^3 \sqrt{x+1} dx$

(c) $\int_0^2 \sin(x+1)dx$

Improprius integrálok

11. Számoljuk ki az improprius integrálokat!

(a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{2/3}}dx$

(c) $\int_2^\infty \frac{2}{x^2-x}dx$

(d) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}dx$

(e) $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg} x)}dx$

(f) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

(g) $\int_{-1}^4 \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$

12. Vizsgáljuk meg, hogy a megadott integrálok konvergensek-e! Használjuk a definiciót, az összehasonlító kritériumokat vagy a hányadostesztet!

(a) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$

(b) $\int_0^{\ln 2} x^{-2}e^{-1/x}dx$

(c) $\int_{-1}^1 \ln|x|dx$

(d) $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

(e) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^6+1}}dx$

(f) $\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}dx$

(g) $\int_4^\infty \frac{2}{x^{3/2}-1}dx$

(h) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$

13. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$$

divergens, így az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$$

integrál is divergens! Lássuk be, hogy ezzel szemben

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2xdx}{x^2+1} = 0!$$

14. Vegyük azt a forgástestet, amely az $y = 1/x$, $1 \leq x$ görbe x-tengely körüli megforgatásával keletkezik. A forgástest *felszínét* az

$$\int_{1}^{\infty} 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$$

integrállal számolhatjuk ki. Tudjuk, hogy az $\int_1^\infty (dx/x)$ divergens, így tetszleges b-re

$$\int_{1}^{b} 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx > 2\pi \int_{1}^{b} \frac{1}{x}dx,$$

amiből az következik, hogy a forgástest felszínét leíró integrál *divergens*. Viszont a test *térfogatát* leíró

$$\int_{1}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

integrál konvergens.

(a) Számoljuk ki az utóbbi integrál értékét!

(b) Ezt a forgástestet sokszor úgy emlegetik, mint egy olyan festékesbödönt, amibe nem fér bele annyi festék, amennyivel be lehetne festeni a belsejét. Töprengjünk el ezen! Az biztos, hogy véges mennyiségű festékkel nem tudjuk befesteni a végtelen területű felszínt. De ha csurig töltjük a bödönt - amihez véges mennyiségű festék is elég - a festék megfesti a felszínt belülről! Oldjuk fel ezt az ellentmondást!