Matematika A1

13. feladatsor

Az integrál alkalmazásai

Térfogatszámítás

1. Keressük meg a forgástest x-tengelyre merőleges síkmetszetének $A(x)$ képletét.

   (a) A test az x-tengelyre merőleges $x = -1$ és $x = 1$ síkok között helyezkedik el. A síkmetszetek minden esetben e két sík között, az x-tengelyre merőlegesen az $y = -\sqrt{1-x^2}$ félkörtől az $y = \sqrt{1-x^2}$ félkörig futnak.

      i. A síkmetszetek olyan körlapok, amelyek átmérője az xy-síkban van.
      Megoldás: $A(x) = \pi(1-x^2)$

      ii. A síkmetszetek olyan négyzetek, amelyeknek egyik átlója az xy-síkban fekszik.
      Megoldás: $A(x) = 2(1-x^2)$

   (b) A test az x-tengelyre merőleges $x = 0$ és $x = 4$ síkok között helyezkedik el. A síkmetszetek minden esetben e két sík között, az x-tengelyre merőlegesen az $y = -\sqrt{x}$ parabolától az $y = \sqrt{x}$ paraboláig futnak.

      i. A síkmetszetek olyan négyzetek, amelyeknek egyik oldaléle az xy-síkban fekszik.
      Megoldás: $4x$

      ii. A síkmetszetek egyenlő oldalú háromszögek, alapjuk az xy-síkban fekszik.
      Megoldás: $\frac{\sqrt{3}}{2}x$

2. Számítsuk ki a testek térfogatát!

   (a) A test az x-tengelyre merőleges $x = 0$ és $x = 4$ síkok között helyezkedik el. A tengelyre merőleges síkmetszetek a $0 \leq x \leq 4$ intervallumban olyan négyzetek, amelyek átlóinak végpontja az $y = -\sqrt{x}$ és az $y = \sqrt{x}$ parabolán van rajta.
   Megoldás: 16

   (b) A test alapja az $y = 2\sqrt{\sin x}$ görbe és az x-tengely $[0, \pi]$ intervalluma által közbezárt tartomány. Az x-tengelyre merőleges síkmetszetek egyenlő oldalú háromszögek, amelyeknek alapjainak végpontjai az x-tengelyen és a görbén futnak végig.
   Megoldás: $2\sqrt{3}$

3. Határozzuk meg azoknak a forgástesteknek a térfogatát, amelyek az alább megadott egyenesek és görbék által meghatározott tartományok x-tengely körüli forgatásával jönnek létre!

(a) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$
Megoldás: $\frac{32\pi}{5}$

(b) $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$
Megoldás: 36π

(c) $y = \sqrt{\cos x}$, $0 \leq x \leq \pi/2$, $y = 0$, $x = 0$
Megoldás: π

(d) $y = x$, $y = 1$, $x = 0$
Megoldás: $\frac{2\pi}{3}$

(e) $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$
Megoldás: $\frac{117\pi}{5}$

4. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, amely az $y = x^2$ parabola és az $y = 1$ egyenes által határolt tartomány

   (a) $y = 1$ egyenes,
   Megoldás: $\frac{16\pi}{5}$

   (b) $y = 2$ egyenes,
   Megoldás: $\frac{56\pi}{15}$

   (c) $y = -1$ egyenes
   Megoldás: $\frac{64\pi}{15}$

   körüli forgatásával áll elő!

5. Héjmódszerrel határozzuk meg a megadott egyenesek és görbék által meghatározott tartományoka megadott tengely körüli forgatásával generált forgástest térfogatát!

   (a) $y = x$, $y = -x/2$, $x = 2$ az y-tengely körül
   Megoldás: 8π

   (b) $y = x^2$, $y = 2 - x$, $x = 0$, $x \geq 0$ az y-tengely körül
   Megoldás: $\frac{5\pi}{6}$

   (c) $y = 2x - 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ az y-tengely körül
   Megoldás: $\frac{7\pi}{15}$

   (d) $x = \sqrt{y}$, $x = -y$, $y = 2$ az x-tengely körül
   Megoldás: $\frac{16\pi}{15}\left(3\sqrt{2} + 5\right)$

   (e) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$ az x-tengely körül
   Megoldás: $\frac{16\pi}{3}$

6. Számítsuk ki a megadott tartomány megadott tengely körüli forgatása révén keletkező forgástest térfogatát!

   (a) Az $(1,1), (1,2), (2,2)$ csúcspontú háromszöget megforgatjuk

      i. az x-tengely
      Megoldás: $5\pi/3$

      ii. az y-tengely
      Megoldás: $4\pi/3$

      iii. az $x = 10/3$ egyenes
      Megoldás: 2π

      iv. az $y = 1$ egyenes
      Megoldás: $2\pi/3$

   körül.

   (b) Az $x = y - y^3$ görbe és az y-tengely által határolt, az első síknegyedben fekvő tartományt megforgatjuk

      i. x-tengely
      Megoldás: $4\pi/15$

      ii. az $y = 1$ egyenes
      Megoldás: $7\pi/30$

   körül.

Ívhossz számítás

7. Számítsuk ki a görbék hosszát!

   (a) $x = 1 - t$, $y = 2 + 3t$, $-2/3 \leq t \leq 1$,
   Megoldás: $\frac{5\sqrt{10}}{3}$

   (b) $x = t^2/2$, $y = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}$, $0 \leq t \leq 4$,
   Megoldás: 12

   (c) $x = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}$, $y = t + t^2/2$, $0 \leq t \leq 3$,
   Megoldás: 21/2

   (d) $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$, az $x =$ és $x = 3$ között,
   Megoldás: 12

   (e) $x = (y^3/3) + 1/(4y)$, $y = 1$ és $y = 3$ között, (*Útmutatás*: $a + (dx/dy)^2$ teljes négyzet.)
   Megoldás: 53/6

   (f) $y = (3/4)x^{4/3} - (3/8)x^{2/3} + 5$, $1 \leq x \leq 8$
   Megoldás: 99/8

Numerikus integrálás

8. Becsüljük meg az alábbi integrálokat a trapéz- és Simpson-formulával is!

    - A trapézformulát használva:
        - becsüljük meg az integrált $n = 4$ részintervallum használatával, és adjunk felső korlátot $|E_T|$-re,
        - számoljuk ki az integrál pontos értékét, utánna $|E_T|$ pontos értékét,
        - az $(|E_T|/(\text{pontos integrál}))\cdot 100$ képlettel határozzuk meg, hogy a hiba hány százaléka az integrálnak!
    - A Simpson-formulát használva:
        - becsüljük meg az integrált $n = 4$ részintervallum használatával, és adjunk felső korlátot $|E_S|$-re,
        - számoljuk ki az integrál pontos értékét, utánna $|E_S|$ pontos értékét,
        - az $(|E_S|/(\text{pontos integrál}))\cdot 100$ képlettel határozzuk meg, hogy a hiba hány százaléka az integrálnak!

    (a) $\int\limits_1^2 x dx$

    Megoldás: trapéz: $1.5; 0$, $1.5; 0$, 0%; Simpson: $1.5; 0$, $1.5; 0$, 0%

    (b) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2} dx$

    Megoldás: trapéz: $0.509; 0.03125$, $0.5; 0.009$, $0.018 \approx 2\%$; Simpson: $0.5; 0.002604$, $0.5; 0.0004$, 0%

    (c) $\int\limits_0^\pi \sin x dx$

    Megoldás: trapéz: $1.8961; 0.161$, $2; 0.1039$, $0.052 \approx .5\%$; Simpson: $2.0045; 0.0066$, $2; 0.0045$, 0%

9. Az alapintervallumot 8 egyenlő részre osztottuk, és megadtuk a függvény értékeit az oszópontokban. Becsüljük meg az integrál értékét $n = 8$ mellett a trapézformulával, a Simpson-formulával, majd számoljuk ki az integrál pontos értékét, illetve az E_T és E_S hibákat!

    (a) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$

x	$x\sqrt{1-x^2}$
0	0
0.125	0.12402
0.25	0.24206
0.375	0.34763
0.5	0.43301
0.625	0.48789
0.75	0.49608
0.875	0.42361
1	0

Megoldás: 0.31929, 0.32812, 1/3, 0.01404, 0.00521

(b) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\cos x}{(2+\sin x)^2} dx$

x	$x\sqrt{1-x^2}$
-1.5708	0
-1.1781	0.99138
-0.7854	1.26906
-0.3927	1.05961
0	0.75
0.3927	0.48821
0.7854	0.28946
1.1781	0.13429
1.5708	0

Megoldás: 1.95643, 2.00421, 2, 0.04357, -0.00421

10. Minimálisan hány részintervallumra kell osztanunk az alapintervallumoz, hogy **(i)** a trapézformula, **(ii)** a Simpson-formula hibája 10^{-4} alá csökkenjen az alábbi integrálok közelítő kiszámolásánál?

(a) $\int\limits_0^2 (x^3+x)dx$
Megoldás: 283, 2

(b) $\int\limits_0^3 \sqrt{x+1}dx$
Megoldás: 76, 12

(c) $\int\limits_0^2 \sin(x+1)dx$
Megoldás: 82, 8

Improprius integrálok

11. Számoljuk ki az improprius integrálokat!

(a) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx$
Megoldás: $\pi/2$

(b) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x^{2/3}} dx$
Megoldás: 6

(c) $\int\limits_2^\infty \frac{2}{x^2-x} dx$
Megoldás: $\ln 4$

(d) $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$
Megoldás: $\sqrt{3}$

(e) $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg} x)} dx$
Megoldás: $\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$

(f) $\int\limits_0^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$
Megoldás: $\pi/2$

(g) $\int\limits_{-1}^{4} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$
Megoldás: 6

12. Vizsgáljuk meg, hogy a megadott integrálok konvergensek-e! Használjuk a definiciót, az összehasonlító kritériumokat vagy a hányadostesztet!

(a) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$
Megoldás: divergens

(b) $\int\limits_0^{\ln 2} x^{-2} e^{-1/x} dx$
Megoldás: konvergens

(c) $\int\limits_{-1}^{1} \ln|x| dx$
Megoldás: konvergens

(d) $\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$
Megoldás: divergens

(e) $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^6+1}} dx$
Megoldás: konvergens

(f) $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x} dx$
Megoldás: divergens

(g) $\int\limits_4^{\infty} \frac{2}{x^{3/2}-1} dx$
Megoldás: konvergens

(h) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$
Megoldás: konvergens

13. Mutassuk meg, hogy

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$$

divergens, így az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$$

integrál is divergens! Lássuk be, hogy ezzel szemben

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2xdx}{x^2+1} = 0!$$

14. Vegyük azt a forgástestet, amely az $y = 1/x$, $1 \leq x$ görbe x-tengely körüli megforgatásával keletkezik. A forgástest *felszínét* az

$$\int_{1}^{\infty} 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$$

integrállal számolhatjuk ki. Tudjuk, hogy az $\int_1^\infty (dx/x)$ divergens, így tetszleges b-re

$$\int_{1}^{b} 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx > 2\pi \int_{1}^{b} \frac{1}{x}dx,$$

amiből az következik, hogy a forgástest felszínét leíró integrál *divergens*. Viszont a test *térfogatát* leíró

$$\int_{1}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

integrál konvergens.

(a) Számoljuk ki az utóbbi integrál értékét!
Megoldás: π

(b) Ezt a forgástestet sokszor úgy emlegetik, mint egy olyan festékesbödönt, amibe nem fér bele annyi festék, amennyivel be lehetne festeni a belsejét. Töprengjünk el ezen! Az biztos, hogy véges mennyiségű festékkel nem tudjuk befesteni a végtelen területű felszínt. De ha csurig töltjük a bödönt - amihez véges mennyiségű festék is elég - a festék megfesti a felszínt belülről! Oldjuk fel ezt az ellentmondást!