

# Matematika A1

## 2. gyakorlat

### Irracionális számok

- Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis.
  - Egy racionális és egy irracionális szám szorzata irracionális szám.
  - Két irracionális szám összege irracionális.
  - Két irracionális szám szorzata irracionális.
  - Van olyan irracionális és racionális szám, melyek összege racionális.
- Igazoljuk, hogy  $\log_2 \sqrt{3}$  irracionális szám.

### Teljes indukció

- A két valós számra vonatkozó  $|a + b| \leq |a| + |b|$  háromszögegyenlőtlenség alapján igazoljuk, hogy tetszőleges  $n$ -re és  $x_1, \dots, x_n$  számra

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

- Igazoljuk, hogy minden  $n$  természetes számra teljesül a

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

egyenlőség.

- Igazoljuk, hogy ha  $n$  elég nagy, akkor  $n! > n^3$ .
- Igazoljuk, hogy ha  $n \geq -3$ , akkor  $2^n \geq 1/8$ .
- Igazoljuk, hogy  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

### Komplex számok

- Hozzuk algebrai alakra az alábbi kifejezéseket!

(a)  $3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

(b)  $4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

(c)  $(1 + 6i) - i(-4 + 5i)$

(d)  $(1 + i)\overline{(2 - 3i)}$

(e)  $\frac{1}{(1-i)^2}$

(f)  $\frac{2+i}{i(1-4i)}$

9. Írjuk fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját:

- (a)  $1 + i\sqrt{3}$
- (b)  $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
- (c)  $3 + i$

10. Végezzük el a következő gyökvonásokat:

- (a)  $\sqrt[3]{1}$ ;
- (b)  $\sqrt[4]{-16}$ ;
- (c)  $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}}$ .

11. Végezzük el a következő hatványozásokat:

- (a)  $(1 + i\sqrt{3})^3$ ;
- (b)  $(1 - i)^4$ ;
- (c)  $(1 + i)^8$ .

Végezzük el a hatványozást úgy is, hogy a hatvány alapját trigonometrikus alakban írjuk fel.

12. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket:

- (a)  $z^3 = 1 + i$ ;
- (b)  $|z| - z = 1 + 2i$ ;
- (c)  $|\bar{z}| = -4z$ ;
- (d)  $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ ;
- (e)  $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ .