Matematika A1

2. gyakorlat

Irracionális számok

1. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis.

   (a) Egy racionális és egy irracionális szám szorzata irracionális szám.
   Megoldás: Hamis

   (b) Két irracionális szám összege irracionális.
   Megoldás: Hamis

   (c) Két irracionális szám szorzata irracionális.
   Megoldás: Hamis

   (d) Van olyan irracionális és racionális szám, melyek összege racionális.
   Megoldás: Hamis

2. Igazoljuk, hogy $\log_2 \sqrt{3}$ irracionális szám.

Teljes indukció

3. A két valós számra vonatkozó $|a+b| \leq |a| + |b|$ háromszögegyenlőtlenség alapján igazoljuk, hogy tetszőleges n-re és $x_1, \ldots, x_n$ számra

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \quad \leq \quad |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

4. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra teljesül a

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^n} \quad = \quad 1 - \frac{1}{3^n}$$

   egyenlőség.

5. Igazoljuk, hogy ha n elég nagy, akkor $n! > n^3$.

6. Igazoljuk, hogy ha $n \geq -3$, akkor $2^n \geq 1/8$.

7. Igazoljuk, hogy $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Komplex számok

8. Hozzuk algebrai alakra az alábbi kifejezéseket!

   (a) $3\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\Big)$
   Megoldás: $\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

   (b) $4\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big)$
   Megoldás: $2\sqrt{3} + 2i$

   (c) $(1+6i) - i(-4+5i)$
   Megoldás: $6 + 10i$

   (d) $(1+i)\overline{(2-3i)}$
   Megoldás: $-1 + 5i$

   (e) $\frac{1}{(1-i)^2}$
   Megoldás: $\frac{i}{2}$

   (f) $\frac{2+i}{i(1-4i)}$
   Megoldás: $\frac{9}{17} + i\frac{2}{17}$

9. Írjuk fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját:

   (a) $1 + i\sqrt{3}$
   Megoldás: $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

   (b) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
   Megoldás: $2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

   (c) $3 + i$
   Megoldás: $\sqrt{10}\ (\cos(\arctan\frac{1}{3}) + i\sin(\arctan\frac{1}{3}))$

10. Végezzük el a következő gyökvonásokat:

   (a) $\sqrt[3]{1}$;
   Megoldás: $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3};\quad \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3};\quad 1.$

   (b) $\sqrt[4]{-16}$;
   Megoldás: $2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4});\quad 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4});\quad 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4});\quad 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}).$

   (c) $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}}.$
   Megoldás: $2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12});\quad 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4});\quad 2(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}).$

11. Végezzük el a következő hatványozásokat:

   (a) $(1 + i\sqrt{3})^3$;
   Megoldás: -8

(b) $(1-i)^4$;
Megoldás: -4

(c) $(1+i)^8$.
Megoldás: 16

Végezzük el a hatványozást úgy is, hogy a hatvány alapját trigonometrikus alakban írjuk fel.

12. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket:

(a) $z^3 = 1+i$;
Megoldás: $z = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$; $z = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$; $z = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12})$
.

(b) $|z| - z = 1 + 2i$;
Megoldás: $\frac{3}{2} - 2i$

(c) $|\overline{z}| = -4z$;
Megoldás: 0

(d) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$;
Megoldás: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$; $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$; $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

(e) $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$.
Megoldás: $\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$; $\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$; $\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12})$;
$\sqrt[6]{2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$; $\sqrt[6]{2}(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$; $\sqrt[6]{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$