Matematika A1

3. gyakorlat

Térvektorok

Alapműveletek

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges a(z)
   (a) x-tengelyre és azt a $(3, 0, 0)$ pontban metszi,
   (b) z-tengelyre és azt a $(0, 0, 2)$ pontban metszi.

2. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(3, -1, 2)$ ponton és párhuzamos a(z)
   (a) x-tengellyel,
   (b) y-tengellyel,

3. Legyen $\mathbf{u} = (3, -2, 1)$ és $\mathbf{v} = (-2, 5, 0)$. Határozzuk meg a megadott vektorok komponenseit és nagyságát (hosszát)!
   (a) $3\mathbf{u}$
   (b) $\frac{3}{5}\mathbf{u} + \frac{4}{5}\mathbf{v}$

4. Keressük meg a $\vec{P_1P_2}$ irányvektorát, és a P_1P_2 szakasz felezőpontját!
   (a) $P_1(-1, 1, 5) \quad P_2(2, 5, 0)$
   (b) $P_1(3, 4, 5) \quad P_2(2, 3, 4)$

Skalárszorzat

5. Határozzuk meg az $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ értékeit; $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ szögének koszinuszát; $\mathbf{u}$-nak a $\mathbf{v}$ irányú skaláris komponensét.
   (a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$
   (b) $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

6. **A rombusz átlói:** Mutassuk meg, hogy a rombusz (egyenlő oldalú paralelgramma) átlói merőlegesek egymásra!

7. **Vektorra merőleges egyenes:** Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ vektor merőleges az $ax + by = c$ egyenesre. Gondoljunk arra, hogy v meredeksége negatív reciproka az egyenes meredekségének.

Vektorszorzat

8. Számítsuk ki az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ és a $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ vektor hosszát és adjuk meg irányát is (amennyiben értelmezve van)!
   (a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
   (b) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = -3\mathbf{j}$

9. Számítsuk ki a P, Q, R pontok által meghatározott háromszögnek a területét, majd adjunk meg egy PQR síkra merleges egységvektort!

   (a) $P(1,1,1)$, $\quad Q(2,1,3)$, $\quad R(3,-1,1)$.

   (b) $P(2,-2,1)$, $\quad Q(3,-1,2)$, $\quad R(3,-1,1)$.

Vegyesszorzat

10. Ellenőrizzük az $(\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u})$ azonosságot, majd számítsuk ki a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelopipedon térfogatát!

    (a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}$, $\quad \mathbf{v} = 2\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{w} = 2\mathbf{k}$

    (b) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\quad \mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

11. Mi az, ami az alábbiak közül mindig igaz, és mi az, ami nem mindig? Indokoljunk is!

    (a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$

    (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|$

    (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$

    (d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

12. Adott $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok skaláris vagy vektoriális szorzataként írjuk fel a következőket:

    (a) $\mathbf{u}$ merőleges vetítése $\mathbf{v}$-re;

    (b) egy $\mathbf{u}$-ra és $\mathbf{v}$-re ortogonális vektor;

    (c) az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata.

Térgeometria

13. Írjuk fel az egyenesek paraméteres egyenletrendszerét!

    (a) A $P(3,-4,-2)$ ponton átmenő, az $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenes.

    (b) A $P(-2,0,3)$ és $Q(3,5,-2)$ pontokon átmenő egyenes.

    (c) A $(0,-7,0)$ ponton átmenő, az $x + 2y + 2z = 13$ síkra merőleges egyenes.

14. Írjuk fel az $(1,1,-1)$, $(2,0,2)$, $(0,-2,1)$ pontokon átfektetett sík egyenletét.

15. Keressük meg az $x = 2t+1, y = 3t+2, z = 4t+3$, valamint az $x = s+2, y = 2s+4, z = -4s-1$ egyenesek metszéspontját, majd írjuk fel az egyenesek által meghatározott sík egyenesét!

16. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_0(2,1,-1)$ ponton és merőleges a $2x + y - z = 3$, $x + 2y + z = 2$ síkok metszésvonalára.

17. Határozzuk meg a $(0,0,12)$ pont és az $x = 4t$, $y = -2t$, $z = 2t$ egyenes távolságát!

18. Határozzuk meg a $(0,-1,0)$ pont és a $2x + y + 2z = 4$ sík távolságát!

19. Határozzuk meg az $x + y = 1$ és a $2x + y - 2z = 2$ síkok szögét!

20. Határozzuk meg az egyenes és a sík döféspontját!

    (a) $x = 1 - t$, $y = 3t$, $z = 1 + t$; $2x - y + 3z = 6$

    (b) $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 5t$, $z = 3t$; $x + y + z = 2$

21. Párhuzamos-e a az $x = 1 - 2t$, $y = 2 + 5t$, $z = -3t$ egyenes a $2x + y - z = 8$ síkkal? Indokoljuk a választ!

22. Az a, b, c nemnulla számokkal $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ grafikonja egy sík. Mely síkoknak ilyen alakú az egyenletük?