Matematika A1

3. gyakorlat

Térvektorok

Alapműveletek

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges a(z)

   (a) x-tengelyre és azt a $(3, 0, 0)$ pontban metszi,
   Megoldás: $x = 3$

   (b) z-tengelyre és azt a $(0, 0, 2)$ pontban metszi.
   Megoldás: $z = -2$

2. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(3, -1, 2)$ ponton és párhuzamos a(z)

   (a) x-tengellyel,
   Megoldás: $y = -1$, $z = 2$

   (b) y-tengellyel,
   Megoldás: $x = 3$, $z = 2$

3. Legyen $\mathbf{u} = (3, -2, 1)$ és $\mathbf{v} = (-2, 5, 0)$. Határozzuk meg a megadott vektorok komponenseit és nagyságát (hosszát)!

   (a) $3\mathbf{u}$
   Megoldás: $(9, -6, 2)$; 11

   (b) $\frac{3}{5}\mathbf{u} + \frac{4}{5}\mathbf{v}$
   Megoldás: $(\frac{1}{5}, \frac{14}{5}, \frac{3}{5})$; $\frac{\sqrt{206}}{5}$

4. Keressük meg a $\vec{P_1P_2}$ irányvektorát, és a P_1P_2 szakasz felezőpontját!

   (a) $P_1(-1, 1, 5)$ $\quad P_2(2, 5, 0)$
   Megoldás: $\frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$; $(1/2, 3, 5/2)$

   (b) $P_1(3, 4, 5)$ $\quad P_2(2, 3, 4)$
   Megoldás: $-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$; $(5/2, 7/2, 9/2)$

Skalárszorzat

5. Határozzuk meg az $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ értékeit; $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ szögének koszinuszát; $\mathbf{u}$-nak a $\mathbf{v}$ irányú skaláris komponensét.

(a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$
Megoldás: -25, 5, 5; -1; -5

(b) $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
Megoldás: 25, 15, 5; $\frac{1}{3}$; 5

6. **A rombusz átlói:** Mutassuk meg, hogy a rombusz (egyenlő oldalú paralelgramma) átlói merőlegesek egymásra!

7. **Vektorra merőleges egyenes:** Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ vektor merőleges az $ax + by = c$ egyenesre. Gondoljunk arra, hogy v meredeksége negatív reciproka az egyenes meredekségének.

Vektorszorzat

8. Számítsuk ki az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ és a $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ vektor hosszát és adjuk meg irányát is (amennyiben értelmezve van)!

(a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
Megoldás: $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 0$, az irány nincs meghatározva; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 0$, az irány nincs meghatározva.

(b) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = -3\mathbf{j}$
Megoldás: $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 6$, az irány $-\mathbf{k}$; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 6$, az irány $\mathbf{k}$.

9. Számítsuk ki a P, Q, R pontok által meghatározott háromszögnek a területét, majd adjunk meg egy PQR síkra merleges egységvektort!

(a) $P(1, 1, 1), \quad Q(2, 1, 3), \quad R(3, -1, 1)$.
Megoldás: 3; $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$

(b) $P(2, -2, 1), \quad Q(3, -1, 2), \quad R(3, -1, 1)$.
Megoldás: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$

Vegyesszorzat

10. Ellenőrizzük az $(\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u})$ azonosságot, majd számítsuk ki a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelopipedon térfogatát!

(a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = 2\mathbf{k}$
Megoldás: 8

(b) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
Megoldás: 7

11. Mi az, ami az alábbiak közül mindig igaz, és mi az, ami nem mindig? Indokoljunk is!

(a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$
Megoldás: Igaz

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|$
Megoldás: Nem mindig igaz

(c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$
Megoldás: Igaz

(d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
Megoldás: Igaz

12. Adott **u**, **v** és **w** vektorok skaláris vagy vektoriális szorzataként írjuk fel a következőket:

(a) **u** merőleges vetítése **v**-re;
Megoldás: $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$

(b) egy **u**-ra és **v**-re ortogonális vektor;
Megoldás: $\pm\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

(c) az **u**, **v**, **w** vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata.
Megoldás: $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v})| \cdot \mathbf{w}$

Térgeometria

13. Írjuk fel az egyenesek paraméteres egyenletrendszerét!

(a) A $P(3, -4, -2)$ ponton átmenő, az $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenes.
Megoldás: $x = 3 + t$, $y = -4 + t$, $z = -1 + t$

(b) A $P(-2, 0, 3)$ és $Q(3, 5, -2)$ pontokon átmenő egyenes.
Megoldás: $x = -2 + 5t$, $y = 5t$, $z = 3 - 5t$

(c) A $(0, -7, 0)$ ponton átmenő, az $x + 2y + 2z = 13$ síkra merőleges egyenes.
Megoldás: $x = t$, $y = -7 + 2t$, $z = 2t$

14. Írjuk fel az $(1, 1, -1)$, $(2, 0, 2)$, $(0, -2, 1)$ pontokon átfektetett sík egyenletét.
Megoldás: $7x - 5y - 4z = 6$

15. Keressük meg az $x = 2t + 1, y = 3t + 2, z = 4t + 3$, valamint az $x = s + 2, y = 2s + 4, z = -4s - 1$ egyenesek metszéspontját, majd írjuk fel az egyenesek által meghatározott sík egyenesét!
Megoldás: $(1, 2, 3)$; $-20x + 12y + z = 7$

16. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_0(2, 1, -1)$ ponton és merőleges a $2x + y - z = 3$, $x + 2y + z = 2$ síkok metszésvonalára.
Megoldás: $x - y + z = 0$

17. Határozzuk meg a $(0, 0, 12)$ pont és az $x = 4t$, $y = -2t$, $z = 2t$ egyenes távolságát!
Megoldás: $2\sqrt{30}$

18. Határozzuk meg a $(0, -1, 0)$ pont és a $2x + y + 2z = 4$ sík távolságát!
Megoldás: $5/3$

19. Határozzuk meg az $x + y = 1$ és a $2x + y - 2z = 2$ síkok szögét!
Megoldás: $\pi/4$

20. Határozzuk meg az egyenes és a sík döféspontját!

    (a) $x = 1 - t$, $y = 3t$, $z = 1 + t$; $2x - y + 3z = 6$
    Megoldás: $(3/2, -3/2, 1/2)$

    (b) $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 5t$, $z = 3t$; $x + y + z = 2$
    Megoldás: $(1, 1, 0)$

21. Párhuzamos-e a az $x = 1 - 2t$, $y = 2 + 5t$, $z = -3t$ egyenes a $2x + y - z = 8$ síkkal? Indokoljuk a választ!
    Megoldás: Nem

22. Az a, b, c nemnulla számokkal $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ grafikonja egy sík. Mely síkoknak ilyen alakú az egyenletük?
    Megoldás: $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ az összes síkot leírja az origón átmenő síkok és a koordinátatengelyekkel párhuzamos síkok kivételével.