Matematika A1

4. gyakorlat

Határérték

1. Következik-e abból, hogy $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$ az, hogy f értelmezve van az 1 helyen? Ha igen, vajon szükségképpen fennáll, hogy $f(1) = 5$? Állíthatunk egyáltalán *bármit* is az $f(1)$ függvényértékéről?

2. Számítsuk ki a határértékeket!

   (a) $\lim_{h \to 0} \frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$

   (b) $\lim_{t \to 1} \frac{t^2+t-2}{t^2-1}$

   (c) $\lim_{u \to 1} \frac{u^4-1}{u^3-1}$

   (d) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$

3. Adjuk meg a következő határértékeket, ha tudjuk, hogy $\lim_{x \to b} f(x) = 7$ és $\lim_{x \to b} g(x) = -3$.

   (a) $\lim_{x \to b}(f(x) + g(x))$

   (b) $\lim_{x \to b} f(x) \cdot g(x)$

   (c) $\lim_{x \to b} 4g(x)$

   (d) $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}$

4. Rajzoljuk le a függvény grafikonját, majd az ábra alapján keressük meg az L határértéket az x_0 pontban, valamint határozzunk meg olyan $\delta > 0$ számot, amelyre bármely x, $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén fennáll $|f(x) - L| < \varepsilon$.

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 1/4$

   (b) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 1$

5. Adott egy $f(x)$ függvény, valamint egy x_0 és egy ε szám. Állapítsuk meg, hogy mennyi $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Ezután adjunk meg egy δ számot, amelyre teljesül, hogy minden x esetén

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

   (a) $f(x) = 2x + 5$, $x_0 = -7$, $\varepsilon = 0.1$

   (b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 0,05$

   (c) $f(x) = \sqrt{1 - 5x}$, $x_0 = -3$, $\varepsilon = 0,5$

   (d) $f(x) = mx + b$, $x_0 = 1/2$, $\varepsilon = c$

6. Igazoljuk, hogy $\lim_{x \to c} f(x) = L$ pontosan akkor áll fenn, ha $\lim_{h \to 0} f(h + c) = L$.

7. Mennyi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, ha minden $-1 \leq x \leq 1$ esetén $\sqrt{5-2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5-x^2}$?

8. Tegyük fel, hogy a $[-1,1]$ intervallum minden x elemére $x^4 \leq f(x) \leq x^2$, $x < -1$ és $x > 1$ esetén pedig $x^2 \leq f(x) \leq x^4$. Mely c pontok esetén tudjuk ennek alapján biztosan, hogy létezik a $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ határérték? Mit mondhatunk ezekről a határértékekről?

9. Számítsuk ki a határértékeket!

   (a) $\lim\limits_{x\to -0{,}5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$

   (b) $\lim\limits_{x\to -2^+} \left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{2x+5}{x^2+x}\right)$

   (c) $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

   (d) $\lim\limits_{x\to -2^+} (x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$

   (e) $\lim\limits_{x\to -2^-} (x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$

   (f) $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\sin\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

   (h) $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$

10. Számítsuk ki a megadott függvények határértékét, amint $x \to \infty$ és amint $x \to -\infty$.

    (a) $f(x) = \frac{2}{x} - 3$

    (b) $g(x) = \frac{1}{2+(1/x)}$

    (c) $h(x) = \frac{-5+(7/x)}{3-(1/x^2)}$

11. Számítsuk ki a megadott határértékeket.

    (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{3x}$

    (b) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{4}{(x-7)^2}$

    (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$

    (d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$

12. $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$, amint

    (a) $x \to 0^+$

    (b) $x \to 2^+$

    (c) $x \to 2^-$

    (d) $x \to 2$

    (e) Mit mondhatunk (ha mondhatunk valamit egyáltalán) a függvény határértékéről, amint $x \to 0$?

13. $\lim \left(\frac{1}{x^{1/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}}\right)$, amint

    (a) $x \to 0^+$

    (b) $x \to 0^-$

    (c) $x \to 1^+$

    (d) $x \to 1^-$