

# Matematika A1

## 5. gyakorlat

### Számsorozatok

1. Igazoljuk a határérték definíciója alapján az állítást és határozzunk meg egy  $N$  küszöbindexet az  $\varepsilon = 10^{-4}$  hibakorláthoz!

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-3} = \frac{1}{2}$

**Megoldás:**  $N = 12501$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3}{3n^2+1} = \frac{1}{3}$

**Megoldás:**  $N = 105$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 0$

**Megoldás:**  $N = 6931$

2. A  $\infty$ -hez tartás definíciója alapján mutassa meg, hogy az  $a_n = n^3 - 2n^2$  sorozat a  $\infty$ -hez tart, és határozzon meg az  $M = 1000$  alsó küszöbértékhez egy  $N$  küszöbindexet!

**Megoldás:**  $N = 10$

3. Az alább megadott sorozatok közül állapítsuk meg, hogy melyek konvergensek, és melyek divergensek. A konvergens sorozatok esetében határozzuk meg a sorozat határértékét is!

(a)  $a_n = 1 + (0.1)^n$

**Megoldás:** Konvergens, 1

(b)  $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$

**Megoldás:** Konvergens, -1

(c)  $a_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$

**Megoldás:** Konvergens, -5

(d)  $a_n = \frac{n^2-2n+1}{n-1}$

**Megoldás:** Divergens

(e)  $a_n = 1 + (-1)^n$

**Megoldás:** Divergens

(f)  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

**Megoldás:** Konvergens, 0

(g)  $a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

**Megoldás:** Konvergens,  $\sqrt{2}$

(h)  $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$

**Megoldás:** Konvergens, 1

(i)  $a_n = 8^{1/n}$

**Megoldás:** Konvergens, 1

(j)  $a_n = \sqrt[n]{10n}$

**Megoldás:** Konvergens, 1

(k)  $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

**Megoldás:** Konvergens, 4

(l)  $a_n = \frac{n!}{n^n}$

**Megoldás:** Konvergens, 0

(m)  $a_n = \frac{n!}{2^n \cdot 3^n}$

**Megoldás:** Divergens

(n)  $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

**Megoldás:** Konvergens, 1

(o)  $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

**Megoldás:** Konvergens, 0.5

4. Bizonyítsuk be, hogy az  $a_n = \frac{n^k + k}{n^k}$  általános taggal adott sorozat adott  $k$  pozitív egész esetén konvergens. Adjuk meg  $k = 1, 2, 3, 4$  esetben az  $\varepsilon = \frac{1}{100}$ -hoz tartozó küszöbindexet.

**Megoldás:** 100, 14, 6, 4

5. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorozatok növekvők, illetve korlátosak-e.

(a)  $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$

**Megoldás:** Növekvő, korlátos

(b)  $a_n = \frac{2^n \cdot 3^n}{n!}$

**Megoldás:** Korlátos

(c)  $a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$

**Megoldás:** Növekvő, korlátos

6. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\{a_n\}$  konvergens sorozat, akkor minden pozitív  $\varepsilon$  számhoz létezik olyan  $N$  egész szám, amelyre teljesül, hogy minden  $m$  és  $n$  esetén

$$m > N \text{ és } n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

7. Mi a határértéke az  $a_1 = 2$ ,  $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + 2$  sorozatnak?

**Megoldás:** 4

8. Az  $\{a_n\}$  sorozat első eleme  $a$ , általános tagját pedig az  $a_{n+1} = ba_n + c$  képlettel adjuk meg, ahol  $a$ ,  $b$ ,  $c$  adott valós számokat jelentenek. Az  $a$ ,  $b$  és  $c$  paraméter mely értékei esetén lesz az  $\{a_n\}$  sorozat kovergens?

**Megoldás:** Ha  $|b| < 1$ , akkor  $a$  és  $c$  tetszleges, a határérték  $\frac{c}{1-b}$ . Ha  $b = -1$ , akkor  $c = 2a$ , ahol  $a$  tetszleges, a határérték  $a$ . Ha  $b = 1$ , akkor  $c = 0$ , a határérték  $a$ . Ha  $|b| > 1$ , akkor  $c = a(1-b)$ , a határérték  $a$ .

9. Tekintsük az  $a_1 = 2$ ,  $a_n = \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right)$ ,  $n > 1$  képlettel adott sorozatot. Igazoljuk, hogy a sorozat határértéke  $\sqrt{2}$ .

**Megoldás:** Először mutassuk meg, hogy a sorozat minden eleme nagyobb  $\sqrt{2}$ -nél, majd bizonyítsuk be, hogy a sorozat monoton csökkenő.

10. Tekintsük az  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$  képlettel adott sorozatot.

(a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat konvergens.

(b) Mutassuk meg, hogy a sorozat határértéke  $\frac{1}{3}$ .

11. Határozzuk meg a megadott sorozatok torlódási pontjainak halmazát.

(a)  $a_n = \left( \cos \left( n \frac{\pi}{2} \right) \right) \frac{2n^2 - 3}{n^2 + n + 8}$

**Megoldás:**  $\{-2, 0, 2\}$

(b)  $\sqrt{\frac{n^3 + (-1)^n n^3}{3n^3 + n + 8}}$

**Megoldás:**  $\{0, \frac{\sqrt{6}}{3}\}$