Matematika A1

6. gyakorlat

Folytonosság

1. Ábrázoljuk az
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -1 \le x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ -2x + 4 & 1 < x < 2 \\ 0 & 2 < x < 3 \end{cases}$$
függvény grafikonját. Vizsgáljuk meg határérték, jobb illetve bal oldali határérték, valamint folytonosság, jobb, illetve bal oldali folytonosság szempontjából az $x = -1$, 0, 1, 2 és 3 helyeket. Van-e az $f(x)$ függvénynek megszüntethető szakadása?

2. Ábrázoljuk az
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \le -1 \\ -x & -1 < x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ -x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$
függvény grafikonját. Vizsgáljuk meg határérték, jobb illetve bal oldali határérték, valamint folytonosság, jobb, illetve bal oldali folytonosság szempontjából az $x = -1$, 0, 1, 2 és 3 helyeket. Van-e az $f(x)$ függvénynek megszüntethető szakadása?
Megoldás: $x = -1$: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, így $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1 = f(x)$, f tehát folytonos az $x = -1$ helyen. $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, így $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, mivel azonban $f(0) \neq 0$, f nem folytonos az $x = 0$ helyen; a szakadás megszűnik, ha az $f(0)$ függvényértéket 0-nak definiáljuk. $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$, viszont $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, emiatt $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nem létezik, f-nek nem megszüntethető szakadása van az $x = 1$ helyen.

3. Mely pontokban folytonosak az alább megadott függvények?

   (a) $y = \frac{1}{x-2} - 3x$
   Megoldás: Az $x = 2$ kivételével mindenütt.

   (b) $y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$
   Megoldás: Az $x = 1$ és az $x = 3$ kivételével mindenütt.

   (c) $y = \frac{\cos x}{x}$
   Megoldás: Az $x = 0$ kivételével mindenütt.

(d) $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$
Megoldás: Az $x = n\pi + \pi/2$ helyek kivételével mindenütt.

(e) $y = \sqrt{2x+3}$
Megoldás: $x > -3/2$ esetén.

4. Igazoljuk, hogy a függvénynek a megadott helyen létezik folytonos kiterjesztése.

   (a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, \quad x = -1$
   Megoldás: f(-1)=-2 választással.

   (b) $g(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-6}, \quad x = 3$
   Megoldás: f(3)=4 választással.

5. Adjuk meg az a értékét úgy , hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 3 \\ 2ax & x \geq 3 \end{cases}$$

   függvény mindenütt folytonos legyen.
   Megoldás: $a = \frac{4}{3}$

6. Ki lehet-e terjeszteni az $f(x) = x(x^2-1)/|x^2-1|$ függvényt úgy, hogy az $x = -1$ vagy az $x = 1$ helyen folytonossá váljon? Indokoljuk válaszunkat. (A függvény grafikonja meglehetősen érdekes, érdemes ábrázolni.)
   Megoldás: Egyikben sem; a $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ és a $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ határérték nem létezik.

7. **Folytonos függvények nem folytonos kompozíciója.**Adjunk példát olyan, az $x = 0$ helyen folytonos f és g függvényekre, amelyeknek $f \circ g$ kompozíciója nem folytonos az $x = 0$ helyen. Ellentmond-e ez a tanult tételnek? Indokoljuk válaszunkat.
   Megoldás: pl: $g(x) = 1$; $f(x) = -1$ ha $x < 1$, és $f(x) = 1$ ha $x > 1$.

8. **Egy fixponttétel.** Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos a $[0, 1]$ intervallumban, és hogy minden $x \in [0, 1]$ esetén $0 \leq f(x) \leq 1$. igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan $c \in [0, 1]$ szám, amelyre $f(c) = c$. (Az ilyen c-t az f függvény fixpontjának nevezzük.)
   Megoldás: Vizsgáljuk meg az $f(x) - x$ függvényt.

9. **Folytonos függvények előjeltartó tulajdonsága.** Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az (a, b) intervallumon, és hogy az intervallum egy c pontjában f folytonos és $f(c) \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik egy c-t tartalmazó $(c - \delta, c + \delta)$ intervallum, amelyen az $f(x)$ függvényértékek előjele nem változik. (Vegyük észre: kikötjük ugyan, hogy az f a teljes (a, b) intervallumon értelmezve legyen, a folytonosságot azonban a c kivételével egyetlen más pontban sem követeljük meg. A c-beli folytonosság és az $f(c) \neq 0$ feltétel elég ahhoz, hogy a függvényértékek előjele egy teljes intervallumon állandó maradjon.)
   Megoldás: Definicióból következik.

10. **Az egyenlítő átellenes pontjai.** Igaz-e, hogy az Egyenlítőn egymással szemben elhelyezkedő pontpárok között mindig van olyan, amelynek tagjai egyenlő hőmérsékletűek. Indokoljuk válaszunkat.
Megoldás: Igaz

11. Létezik-e maximuma az $f(x) = x^2$ függvénynek a $-1 < x < 1$ nyílt intervallumon? Minimuma? Ellentmond-e ez a max-min tételnek? Indokoljunk.
Megoldás: Maximuma nincs, minimuma van. Nem mond ellen, mert az intervallum nem zárt.

12. Mutassuk meg, hogy a $\cos x = x$ egyenletnek van megoldása. (Segítség: Írjuk át $\cos x - x = 0$ alakba és alkalmazzuk rá a közbensőérték-tételt.) Grafikusan, számológép segítségével, ellenőrizzük, hogy az $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \cos x_n$ rekurzió a megoldáshoz konvergál.
Megoldás: Például $x = 0$-ra $\cos x - x$ pozitív, $x = \pi/2$-re $\cos x - x$ negatív.

13. **Dirichlet függvény** Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy az f függvény sehol sem folytonos.
Megoldás: Bármelyik irracionális számhoz létezik tetszőleges közel racionális szám, és fordítva.