

Matematika A1

7. feladatsor

Differenciálás

Meredekség, érintők

1. Írjuk fel a görbét az adott pontban érintő egyenletét; számításunkat ellenőrizzük a görbe és az érintő ábrázolásával.

(a) $y = 4 - x^2$, $(-1, 3)$

(b) $y = 2\sqrt{x}$, $(1, 2)$

(c) $y = x^3$, $(-2, -8)$

(d) $y = \frac{x}{x-2}$, $(3, 3)$

2. Állapítsuk meg a görbét az adott abszcisszájú pontban érintő egyenes meredekségét.

(a) $y = 5x^2$, $x = -1$

(b) $y = \frac{1}{x-1}$, $x = 3$

3. A megadott görbék melyik pontjában lesz vízszintes az érintő.

(a) $f(x) = x^2 + 4x - 1$

(b) $f(x) = x^3 - 3x$

4. Van-e az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény grafikonjának érintője az origóban?

5. Van-e az

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

függvény grafikonjának érintője az origóban? Indokoljuk válaszunkat.

A derivált kiszámítása

6. A definíció alapján határozzuk meg a függvény deriváltját; számítsuk ki a derivált értékét a megadott helyen.

(a) $f(x) = 4 - x^2$, $f'(-3), f'(0), f'(1)$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(-1), f'(2), f'(\sqrt{3})$

(c) $f(x) = \sqrt{3x}$, $f'(1), f'(3), f'(2/3)$

7. Ábrázoljuk a megadott függvényeket, majd a jobb és a bal oldali deriváltak kiszámításával igazoljuk, hogy a függvények a megadott P pontban nem deriválhatóak.

$$(a) f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}, \quad P = (0, 0)$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}, \quad P = (1, 2)$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}, \quad P = (1, 1)$$

Deriválási szabályok

8. Határozzuk meg a függvények első és második deriváltját

$$(a) y = -x^2 + 3$$

$$(b) y = \frac{4x^3}{3} - x$$

$$(c) y = \frac{1}{3x^2} - \frac{5}{2x}$$

$$(d) y = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$(e) y = \left(\frac{x^2+3}{12x}\right) \left(\frac{x^4-1}{x^3}\right)$$

9. Határozzuk meg a függvények első deriváltját.

$$(a) y = \frac{2x+5}{3x-2}$$

$$(b) y = (1-x)(1+x^2)^{-1}$$

$$(c) y = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$$

$$(d) y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$$

10. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$ függvény n -edik deriváltját, n tetszőleges pozitív egész szám esetén.

11. Tegyük fel, hogy u és v egyaránt differenciálható függvények, továbbá $u(0) = 5$, $u'(0) = -3$, $v(0) = -1$, $v'(0) = 2$. Számítsuk ki az alábbi függvények értékét az $x = 0$ helyen.

$$(a) \frac{d}{dx}(uv)$$

$$(b) \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$(c) \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$(d) \frac{d}{dx}(7v - 2u)$$

12. Igazoljuk, hogy ha az f , g , h differenciálható függvény és az fgh függvény létezik, akkor fgh is differenciálható és

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$