Matematika A1

7. feladatsor

Differenciálás

Meredekség, érintők

1. Írjuk fel a görbét az adott pontban érintő egyenletét; számításunkat ellenőrizzük a görbe és az érintő ábrázolásával.

   (a) $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$
   Megoldás: $y = 2x + 5$

   (b) $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$
   Megoldás: $y = x + 1$

   (c) $y = x^3, \quad (-2, -8)$
   Megoldás: $y = 12x + 16$

   (d) $y = \frac{x}{x-2}, \quad (3, 3)$
   Megoldás: $y = -2x + 9$

2. Állapítsuk meg a görbét az adott abszcisszájú pontban érintő egyenes meredekségét.

   (a) $y = 5x^2, \quad x = -1$
   Megoldás: $m = -10$

   (b) $y = \frac{1}{x-1}, \quad x = 3$
   Megoldás: $m = -1/4$

3. A megadott görbék melyik pontjában lesz vízszintes az érintő.

   (a) $f(x) = x^2 + 4x - 1$
   Megoldás: $(-2, -5)$

   (b) $f(x) = x^3 - 3x$
   Megoldás: $(-1, 2)$, $(1, -2)$

4. Van-e az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   függvény grafikonjának érintője az origóban?
   Megoldás: Igen.

5. Van-e az
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$
függvény grafikonjának érintője az origóban? Indokoljuk válaszunkat.
Megoldás: Igen.

A derivált kiszámítása

6. A definíció alapján határozzuk meg a függvény deriváltját; számítsuk ki a derivált értékét a megadott helyen.

   (a) $f(x) = 4 - x^2, \quad f'(-3), f'(0), f'(1)$
   Megoldás: A derivált:$-2x$; 6, 0, -2

   (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f'(-1), f'(2), f'(\sqrt{3})$
   Megoldás: A derivált:$-\frac{2}{x^3}$; 2, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$

   (c) $f(x) = \sqrt{3x}, \quad f'(1), f'(3), f'(2/3)$
   Megoldás: A derivált:$\frac{3}{2\sqrt{3x}}$; $\frac{3}{2\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

7. Ábrázoljuk a megadott függvényeket, majd a jobb és a bal oldali deriváltak kiszámításával igazoljuk, hogy a függvények a megadott P pontban nem deriválhatóak.

   (a) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}, \quad P = (0, 0)$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}, \quad P = (1, 2)$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}, \quad P = (1, 1)$

Deriválási szabályok

8. Határozzuk meg a függvények első és második deriváltját

   (a) $y = -x^2 + 3$
   Megoldás: $-2x$, -2

   (b) $y = \frac{4x^3}{3} - x$
   Megoldás: $4x^2 - 1$, $8x$

   (c) $y = \frac{1}{3x^2} - \frac{5}{2x}$
   Megoldás: $-\frac{2}{3x^3} + \frac{5}{2x^2}$, $\frac{2}{x^4} - \frac{5}{x^3}$

   (d) $y = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$
   Megoldás: $4x^3$, $12x^2$

(e) $y = \left(\frac{x^2+3}{12x}\right)\left(\frac{x^4-1}{x^3}\right)$
Megoldás: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^{-3} + x^{-5}$, $\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^{-4} - 5x^{-6}$

9. Határozzuk meg a függvények első deriváltját.

   (a) $y = \frac{2x+5}{3x-2}$
   Megoldás: $-\frac{19}{(3x-2)^2}$

   (b) $y = (1-x)(1+x^2)^-1$
   Megoldás: $\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$

   (c) $y = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$
   Megoldás: $-\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

   (d) $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$
   Megoldás: $\frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

10. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$ függvény n-edik deriváltját, n tetszőleges pozitív egész szám esetén.
Megoldás: $f'(x) = 2x^3 - 3x - 1$, $f''(x) = 6x^2 - 3$, $f'''(x) = 12x$, $f^{(4)}(x) = 12$, és $f^{(n)}(x) = 0$, ha $n > 4$.

11. Tegyük fel, hogy u és v egyaránt differenciálható függvények, továbbá $u(0) = 5$, $u'(0) = -3$, $v(0) = -1$, $v'(0) = 2$. Számítsuk ki az alábbi függvények értékét az $x = 0$ helyen.

    (a) $\frac{d}{dx}(uv)$
    Megoldás: 13

    (b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$
    Megoldás: -7

    (c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$
    Megoldás: 7/25

    (d) $\frac{d}{dx}(7v - 2u)$
    Megoldás: 20

12. Igazoljuk, hogy ha az f, g, h differenciálható függvény és az fgh függvény létezik, akkor fgh is differenciálható és
$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$