Matematika A1

8. feladatsor

Differenciálás II.

Trigonometrikus függvények deriváltja

1. Határozzuk meg a dy/dx függvényt.

   (a) $y = -10x + 3\cos x$

   (b) $y = \frac{1}{\sin x} - 4\sqrt{x} + 7$

   (c) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg} x}$

   (d) $y = \operatorname{tg} x - x$

   (e) $y = \frac{\sin x+1}{\sin x-1}$

   (f) $y = \frac{1}{\sin x \cos x}$

A láncszabály

2. Határozzuk meg a megadott $y = f(u)$ és $u = g(x)$ függvények alapján a $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$ deriváltat.

   (a) $y = 6u - 9, \quad u = (1/2)x^4$

   (b) $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$

   (c) $y = \operatorname{tg} u, \quad u = 10x - 5$

3. Deriváljuk a függvényeket.

   (a) $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$

   (b) $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$

   (c) $y = \frac{1}{\cos(\operatorname{tg} x)}$

   (d) $y = \sin^3 x$

   (e) $y = \cos^4(1 - 2x)$

   (f) $y = \sin(\cos(2x - 5))$

   (g) $y = (1 + \operatorname{ctg}(x/2))^{-2}$

   (h) $y = \sin(x^2)\cos(2x)$

   (i) $y = 4\sin\sqrt{1 + \sqrt{x}}$

   (j) $y = \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}$

   (k) $y = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$

(l) $y = \frac{3}{(5x^2+\sin^2 x)^{3/2}}$

4. Határozzuk meg a az y'' függvényt.

   (a) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$
   (b) $y = \frac{1}{9}\mathrm{ctg}\,(3x - 1)$

5. Legyen $y = x^{3/2}$, határozzuk meg a dy/dx értékét a láncszabály alapján, amennyiben y-t

   (a) az $y = u^3$ és az $u = \sqrt{x}$; illetve
   (b) az $y = \sqrt{u}$ és az $u = x^3$ függvények kompozíciójának tekintjük.

Implicit függvény deriváltja

6. Határozzuk meg az implicit deriválás módszerével a dy/dx deriváltat.

   (a) $x^2y + xy^2 = 6$
   (b) $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$
   (c) $x = \mathrm{tg}\, y$
   (d) $y^2 = \frac{x}{x+1}$
   (e) $y + 2xy + \cos x = x^3$
   (f) $\cos y + xy = 0$

7. Az implicit deriválás módszerével határozzuk meg a dy/dx, majd a d^2y/dx^2 deriváltat.

   (a) $x^2 + y^2 = 1$
   (b) $y^2 = x^2 + 2x$
   (c) $2\sqrt{y} = x - y$

8. Ellenőrizzük, hogy a megadott pont illeszkedik a görbére, majd írjuk fel az adott pontbeli érintő és normális egyenletét.

   (a) $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2, 3)$
   (b) $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$
   (c) $y = \sin(\pi x - y), \quad (1, 0)$

Kapcsolt deriváltak

9. **Térfogat.** Ha egy henger alapja r sugarú kör, magassága pedig h, akkor térfogata $V = \pi r^2 h$

   (a) Milyen kapcsolat áll fenn a dV/dt és a dh/dt derivált között, ha r konstans?
   (b) Milyen kapcsolat áll fenn dV/dt és dr/dt deriváltak között, ha h konstans?
   (c) Milyen kapcsolat áll fenn dV/dt, a dr/dt és dh/dt deriváltak között, ha sem r, sem h nem konstans?

10. **Távolság.** Tegyük fel, hogy x és y egyaránt a t változó differenciálható függvénye. Az xy sík $(x, 0)$ és $(0, y)$ pontjainak távolsága $s = \sqrt{x^2 + y^2}$.

    (a) Milyen kapcsolat áll fenn ds/dt és a dx/dt deriváltak között, ha y konstans?
    (b) Milyen kapcsolat áll fenn ds/dt, dx/dt és a dy/dt derivált között, ha egyik mennyiség sem állandó?
    (c) Milyen kapcsolat áll fenn dx/dt és dy/dt deriváltak között, ha s konstans?

11. **Növekvő homokdomb.** Egy konténerből percenként 10m^3 homokot szórnak ki egy kúp alakú homokdomb tetejére. A kúp magassága mindvégig az alapkör átmérőjének az egyharmada. Mekkora a domb **(a)** magasságának és **(b)** alapköre sugarának változási sebessége (cm/min egységben), amikor a homokdomb éppen 4m magas? (Kúp térfogata: $V = (1/3)\pi r^2 h$)

12. **Síkbeli mozgás.** Az xy-síkban mozgó test x- és y-koordinátája egyaránt a t idő differenciálható függvénye; $dx/dt = -1\text{m/s}$, $dy/dt = -5\text{m/s}$. Milyen sebességgel távolodik a részecske az origótól, amikor áthalad az $(5, 12)$ ponton?

Linearizáció és differenciáltak

13. Keressük meg az $f(x)$ függvény $L(x)$ linearizációját az $x = a$ helyen.
    (a) $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$
    (b) $f(x) = x\frac{1}{x}, \quad a = 1$
    (c) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad a = -\pi/4$

14. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = (1 + x)^k$ függvény linearizációja az $x = 0$ helyen $L(x) = 1 + kx$

15. Keressük meg az $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ függvény linearizációját az $x = 0$ pontban. Hogyan viszonyul ez a lineáris közelítés a $\sqrt{x+1}$ és a $\sin x$ függvény $x = 0$ pontbeli linearizációihoz?

16. Írjuk fel a dy differenciált.
    (a) $y = x^3 - 3\sqrt{x}$
    (b) $2y^{3/2} + xy - x = 0$
    (c) $y = \sin(5\sqrt{x})$
    (d) $x^2 + 2xy + y^2 = \sin y$