Matematika A1

8. feladatsor

Differenciálás II.

Trigonometrikus függvények deriváltja

1. Határozzuk meg a dy/dx függvényt.

   (a) $y = -10x + 3\cos x$
   Megoldás: $-10 - 3\sin x$

   (b) $y = \frac{1}{\sin x} - 4\sqrt{x} + 7$
   Megoldás: $-\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

   (c) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg} x}$
   Megoldás: $-\frac{1}{(\sin^2 x)(1+\operatorname{ctg} x)^2}$

   (d) $y = \operatorname{tg} x - x$
   Megoldás: $\frac{1}{\cos^2 x} - 1$

   (e) $y = \frac{\sin x+1}{\sin x-1}$
   Megoldás: $\frac{-2\cos x}{(\sin x-1)^2}$

   (f) $y = \frac{1}{\sin x \cos x}$
   Megoldás: $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$

A láncszabály

2. Határozzuk meg a megadott $y = f(u)$ és $u = g(x)$ függvények alapján a $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$ deriváltat.

   (a) $y = 6u - 9, \quad u = (1/2)x^4$
   Megoldás: $12x^3$

   (b) $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$
   Megoldás: $3\cos(3x + 1)$

   (c) $y = \operatorname{tg} u, \quad u = 10x - 5$
   Megoldás: $\frac{10}{\cos^2(10x-5)}$

3. Deriváljuk a függvényeket.

(a) $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$
Megoldás: $\left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-8}$

(b) $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$
Megoldás: $4\left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^3 \left(\frac{x}{4} + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$

(c) $y = \frac{1}{\cos(\operatorname{tg} x)}$
Megoldás: $\frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{(\cos^2 x)(\cos^2(\operatorname{tg} x))}$

(d) $y = \sin^3 x$
Megoldás: $3\sin^2 x(\cos x)$

(e) $y = \cos^4(1-2x)$
Megoldás: $8\cos^3(1-2x)\sin(1-2t)$

(f) $y = \sin(\cos(2x-5))$
Megoldás: $-2\cos(\cos(2x-5))(\sin(2x-5))$

(g) $y = (1 + \operatorname{ctg}(x/2))^{-2}$
Megoldás: $\frac{1}{(\sin^2 \frac{x}{2})(1+\operatorname{ctg} \frac{x}{2})^3}$

(h) $y = \sin(x^2)\cos(2x)$
Megoldás: $-2\sin(x^2)\sin(2x) + 2x\cos(2x)\cos(x^2)$

(i) $y = 4\sin\sqrt{1+\sqrt{x}}$
Megoldás: $\frac{\cos\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}\sqrt{x}}$

(j) $y = \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}$
Megoldás: $\frac{-1}{2x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}}$

(k) $y = (2x+1)\sqrt{2x+1}$
Megoldás: $3\sqrt{2x+1}$

(l) $y = \frac{3}{(5x^2+\sin^2 x)^{3/2}}$
Megoldás: $-9\left(\frac{5x+\cos 2x}{(5x^2+\sin 2x)^{5/2}}\right)$

4. Határozzuk meg a az y'' függvényt.

(a) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$
Megoldás: $\frac{6}{x^3}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)$

(b) $y = \frac{1}{9}\operatorname{ctg}(3x-1)$
Megoldás: $\frac{2\operatorname{ctg}(3x-1)}{\sin^2(3x-1)}$

5. Legyen $y = x^{3/2}$, határozzuk meg a dy/dx értékét a láncszabály alapján, amennyiben y-t
   (a) az $y = u^3$ és az $u = \sqrt{x}$; illetve
   (b) az $y = \sqrt{u}$ és az $u = x^3$ függvények kompozíciójának tekintjük.

   Megoldás: $dy/dx = (3/2)x^{1/2}$

Implicit függvény deriváltja

6. Határozzuk meg az implicit deriválás módszerével a dy/dx deriváltat.
   (a) $x^2y + xy^2 = 6$
   Megoldás: $\frac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

   (b) $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$
   Megoldás: $\frac{1}{y(x+1)^2}$

   (c) $x = \operatorname{tg} y$
   Megoldás: $\cos^2 y$

   (d) $y^2 = \frac{x}{x+1}$
   Megoldás: $\frac{1}{2y(x+1)^2}$

   (e) $y + 2xy + \cos x = x^3$
   Megoldás: $\frac{3x^2+\sin x-2y}{2x+1}$

   (f) $\cos y + xy = 0$
   Megoldás: $\frac{-y}{x-\sin y}$

7. Az implicit deriválás módszerével határozzuk meg a dy/dx, majd a d^2y/dx^2 deriváltat.
   (a) $x^2 + y^2 = 1$
   Megoldás: $y' = -\frac{x}{y}, \quad y'' = \frac{-y^2-x^2}{y^3}$

   (b) $y^2 = x^2 + 2x$
   Megoldás: $y' = \frac{x+1}{y}, \quad y'' = \frac{y^2-(x+1)^2}{y^3}$

   (c) $2\sqrt{y} = x - y$
   Megoldás: $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1}, \quad y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

8. Ellenőrizzük, hogy a megadott pont illeszkedik a görbére, majd írjuk fel az adott pontbeli érintő és normális egyenletét.
   (a) $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2, 3)$
   Megoldás: érintő: $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$, normális: $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$

(b) $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$
Megoldás: érintő: $y = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$, normális: $y = -\frac{7}{6}x - \frac{7}{6}$

(c) $y = \sin(\pi x - y), \quad (1, 0)$
Megoldás: érintő: $y = 2\pi x - 2\pi$, normális: $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$

Kapcsolt deriváltak

9. **Térfogat.** Ha egy henger alapja r sugarú kör, magassága pedig h, akkor térfogata $V = \pi r^2 h$

(a) Milyen kapcsolat áll fenn a dV/dt és a dh/dt derivált között, ha r konstans?
Megoldás: $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$

(b) Milyen kapcsolat áll fenn dV/dt és dr/dt deriváltak között, ha h konstans?
Megoldás: $\frac{dV}{dt} = 2\pi hr \frac{dr}{dt}$

(c) Milyen kapcsolat áll fenn dV/dt, a dr/dt és dh/dt deriváltak között, ha sem r, sem h nem konstans?
Megoldás: $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} + 2\pi hr \frac{dr}{dt}$

10. **Távolság.** Tegyük fel, hogy x és y egyaránt a t változó differenciálható függvénye. Az xy sík $(x, 0)$ és $(0, y)$ pontjainak távolsága $s = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Milyen kapcsolat áll fenn ds/dt és a dx/dt deriváltak között, ha y konstans?
Megoldás: $\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dx}{dt}$

(b) Milyen kapcsolat áll fenn ds/dt, dx/dt és a dy/dt derivált között, ha egyik mennyiség sem állandó?
Megoldás: $\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dy}{dt}$

(c) Milyen kapcsolat áll fenn dx/dt és dy/dt deriváltak között, ha s konstans?
Megoldás: $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x} \frac{dy}{dt}$

11. **Növekvő homokdomb.** Egy konténerből percenként 10m^3 homokot szórnak ki egy kúp alakú homokdomb tetejére. A kúp magassága mindvégig az alapkör átmérőjének az egyharmada. Mekkora a domb **(a)** magasságának és **(b)** alapköre sugarának változási sebessége (cm/min egységben), amikor a homokdomb éppen 4m magas? (Kúp térfogata: $V = (1/3)\pi r^2 h$)
Megoldás: (a) $\frac{dh}{dt} = 11.19 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$, **(b)** $\frac{dr}{dt} = 14.92 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$

12. **Síkbeli mozgás.** Az xy-síkban mozgó test x- és y-koordinátája egyaránt a t idő differenciálható függvénye; $dx/dt = -1\text{m/s}$, $dy/dt = -5\text{m/s}$. Milyen sebességgel távolodik a részecske az origótól, amikor áthalad az $(5, 12)$ ponton?
Megoldás: $-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Linearizáció és differenciáltak

13. Keressük meg az $f(x)$ függvény $L(x)$ linearizációját az $x = a$ helyen.

   (a) $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$
   Megoldás: $L(x) = 10x - 13$

   (b) $f(x) = x\frac{1}{x}, \quad a = 1$
   Megoldás: $L(x) = 2$

   (c) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad a = -\pi/4$
   Megoldás: $L(x) = 2x + \frac{\pi-2}{2}$

14. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = (1+x)^k$ függvény linearizációja az $x = 0$ helyen $L(x) = 1 + kx$
Megoldás: $f(0) = 1$; továbbá $f'(x) = k(1+x)^{k-1}$, így $f'(0) = k$. Az $x = 0$ helyen vett linearizáció ennélfogva $L(x) = 1 + kx$

15. Keressük meg az $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ függvény linearizációját az $x = 0$ pontban. Hogyan viszonyul ez a lineáris közelítés a $\sqrt{x+1}$ és a $\sin x$ függvény $x = 0$ pontbeli linearizációihoz?
Megoldás: $f(0) = 1$; továbbá $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \cos(x)$, így $f'(0) = 3/2$. Az $x = 0$ helyen vett linearizáció ennélfogva $L(x) = 1 + 3/2x$. $L_1(x) = 1 + 1/2x$ és $L_2(x) = x$, azaz $L(x) = L_1(x) + L_2(x)$.

16. Írjuk fel a dy differenciált.

   (a) $y = x^3 - 3\sqrt{x}$
   Megoldás: $\left(3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right) dx$

   (b) $2y^{3/2} + xy - x = 0$
   Megoldás: $\frac{1-y}{3\sqrt{y}+x} dx$

   (c) $y = \sin(5\sqrt{x})$
   Megoldás: $\frac{5}{2\sqrt{x}} \cos(5\sqrt{x}) dx$

   (d) $x^2 + 2xy + y^2 = \sin y$
   Megoldás: $\frac{2x+2y}{\cos y - 2x - 2y} dx$