

Matematika A1

9. feladatsor

A derivált alkalmazásai

Függvény szélsőértékei

1. Keressük meg a függvények abszolút maximumát és minimumát a megadott intervallumon. Ezután rajzoljuk fel a függvény grafikonját. Keressük meg a grafikonon az abszolút szélsőértéknek megfelelő pontokat, és számítsuk ki e pontok koordinátáit.

(a) $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \leq x \leq 3$

(b) $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \leq x \leq 1$

(c) $f(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \leq x \leq -1$

(d) $f(x) = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

2. Keressük meg a differenciálhányadost, az összes kritikus pontot, és határozzuk meg a függvények lokális szélsőértékeit.

(a) $y = x^{2/3}(x + 2)$

(b) $y = x\sqrt{4 - x^2}$

(c) $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

(d) $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

Optimalizálási alkalmazások

3. Egy doboz térfogatát a

$$V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x), \quad 0 < x < 5$$

függvény adja meg.

- (a) Keressük meg a V szélsőértékeit.
(b) Mit jelentenek az (a) részben megoldásul kapott számok a doboz térfogatára nézve?
4. Mennyi a maximális területe annak a derékszögű háromszögnek, amelynek átfogója 5 cm?
5. Tegyük fel, hogy egy adott t időpontban a váltakozó áramú áramkörben az áramerősség értéke $i = 2 \cos t + 2 \sin t$. Mekkora az áramerősség csúcserőssége?

A Lagrange-féle középértéktétel

6. Határozzuk meg a középértéktételben szereplő $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ egyenlőséget kielégítő c értéket vagy értékeket a megadott függvényekre és intervallumokra.

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 2, \quad [0, 1]$

(b) $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$

(c) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad [1, 3]$

7. $a, m,$ és b mely értékeire teljesíti az

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

függvény a $[0, 2]$ intervallumon a középértéktétel feltételeit?

8. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokon pontosan egy zérushelyük van.

(a) $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad (-2, 1]$

(b) $f(x) = \sqrt{x} + x\sqrt{1+x} - 4, \quad (0, \infty)$

(c) $f(x) = x + \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

9. Keressük meg az összes olyan függvényt, amelyeknek a deriváltja a megadott függvény.

(a) $y' = x^3$

(b) $y' = 3x^2 + 2x - 1$

(c) $y' = 4x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

(d) $y' = \sin 2x + \cos \frac{x}{2}$

Monoton függvények és az első derivált teszt

10. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre a megadott deriváltak alapján.

- Melyek f kritikus pontjai,
- Mely intervallumon növekszik, illetve csökken f ?
- Mely pontokban lehet f -nek lokális maximuma vagy minimuma?

(a) $f'(x) = x(x-1)$

(b) $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$

(c) $f'(x) = x^{-1/2}(x-3)$

11.

- Keressük meg azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény csökken illetve nő;
- Amennyiben léteznek, határozzuk meg a függvények szélsőértékeit;
- Állapítsuk meg, hogy mely szélsőértékek abszolút szélsőértékek.

(a) $f(x) = -x^3 + 2x^2$

(b) $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$

(c) $f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1}$

(d) $f(x) = x^{1/3}(x^2 - 4)$

12. • Határozzuk meg a függvény lokális szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit az adott tartományon.
• Közülük mely szélsőértékek abszolút szélsőértékek?

(a) $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

(b) $f(x) = (x+1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$

(c) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$

Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása

13. Ábrázoljuk a megadott függvények grafikonját; adjuk meg a szélsőértékek és az inflexiós pontok koordinátáit.

(a) $y = x^2 - 4x + 3$

(b) $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

(c) $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

(d) $y = x + \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

(e) $y = \frac{x^2-3}{x-2}, \quad x \neq 2$

14. Megadjuk egy folytonos $y = f(x)$ függvény első deriváltját. Határozzuk meg y'' -t, aztán ez alapján vázoljuk fel f grafikonjának általános alakját.

(a) $y' = x^2 - x - 6$

(b) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(c) $y' = \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

(d) $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x & x \leq 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$

15. Ábrázoljuk részletes diszkusszió után a következő függvényeket.

(a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

(b) $f(x) = \frac{6}{x^2+1}$

(c) $f(x) = \sin 2x$

(d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$

(e) $f(x) = x\sqrt{x+3}, \quad -3 \leq x < \infty$

(f) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x, \quad -\pi \leq x \leq 2\pi$