Matematika A1

9. feladatsor

A derivált alkalmazásai

Függvény szélsőértékei

1. Keressük meg a függvények abszolút maximumát és minimumát a megadott intervallumon. Ezután rajzoljuk fel a függvény grafikonját. Keressük meg a grafikonon az abszolút szélsőértéknek megfelelő pontokat, és számítsuk ki e pontok koordinátáit.

   (a) $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \leq x \leq 3$
   Megoldás: abszolút max: -3 az $x = 3$-ban; abszolút min: -19/3 az $x = -2$-ben

   (b) $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \leq x \leq 1$
   Megoldás: abszolút max: 4 az $x = 0$-ban; abszolút min: -5 az $x = -5$-ben

   (c) $f(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \leq x \leq -1$
   Megoldás: abszolút max: 1 az $x = -1$-ben; abszolút min: 1/2 az $x = -2$-ben

   (d) $f(x) = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$
   Megoldás: abszolút max: 1 az $x = \pi/2$-ben; abszolút min: -1 az $x = -\pi/2$-ben

2. Keressük meg a differenciálhányadost, az összes kritikus pontot, és határozzuk meg a függvények lokális szélsőértékeit.

   (a) $y = x^{2/3}(x+2)$
   Megoldás:

kritikus pont	**derivált**	**szélsőérték**	**érték**
$x = -4/5$	0	lokális max.	$\frac{12}{25}10^{1/3} = 1.034$
$x = 0$	nincs ért.	lokális min.	0

   (b) $y = x\sqrt{4 - x^2}$
   Megoldás:

kritikus pont	**derivált**	**szélsőérték**	**érték**
$x = -2$	nincs ért.	lokális max.	0
$x = -\sqrt{2}$	0	min.	-2
$x = \sqrt{2}$	0	max.	2
$x = 2$	nincs ért.	lokális min.	0

   (c) $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$
   Megoldás:

kritikus pont	**derivált**	**szélsőérték**	**érték**
$x = 0$	nincs ért.	lokális min.	3
$x = 1$	0	lokális mmax.	4

(d) $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

Megoldás:

kritikus pont	**derivált**	**szélsőérték**	**érték**
$x = -1$	0	max.	5
$x = 1$	nincs ért.	lokális min.	1
$x = 3$	0	max.	5

Optimalizálási alkalmazások

3. Egy doboz térfogatát a

$$V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x), \quad 0 < x < 5$$

függvény adja meg.

(a) Keressük meg a V szélsőértékeit.

(b) Mit jelentenek az (a) részben megoldásul kapott számok a doboz térfogatára nézve?

Megoldás: (a) A maximumérték $144x = 2$-re; (b) A doboz legnagyobb térfogata 144 térfogategység, s ezt az értéket akkor veszi fel, ha $x = 2$.

4. Mennyi a maximális területe annak a derékszögű háromszögnek, amelynek átfogója 5 cm?
Megoldás: A lehető legnagyobb terület $A\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{4}\text{cm}^2$.

5. Tegyük fel, hogy egy adott t időpontban a váltakozó áramú áramkörben az áramerősség értéke $i = 2\cos t + 2\sin t$. Mekkora az áramerősség csúcsértéke?
Megoldás: Az áramerősség csúcsértéke: $2\sqrt{2}$, a $t = \pi/4 + 2k\pi$-ben.

A Lagrange-féle középértéktétel

6. Határozzuk meg a középértéktételben szereplő $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ egyenlőséget kielégítő c értéket vagy értékeket a megadott függvényekre és intervallumokra.

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 2, \quad [0, 1]$
Megoldás: $1/2$

(b) $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$
Megoldás: $8/27$

(c) $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad [1, 3]$
Megoldás: $3/2$

7. a, m, és b mely értékeire teljesíti az

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

függvény a $[0, 2]$ intervallumon a középértéktétel feltételeit?
Megoldás: $a = 3$, $m = 1$, $b = 4$

8. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvényeknek a megadott intervallumokon pontosan egy zérushelyük van.

   (a) $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad (-2, 1]$

   (b) $f(x) = \sqrt{x} + x\sqrt{1+x} - 4, \quad (0, \infty)$

   (c) $f(x) = x + \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

9. Keressük meg az összes olyan függvényt, amelyeknek a deriváltja a megadott függvény.

   (a) $y' = x^3$
   Megoldás: $\frac{x^4}{4} + C$

   (b) $y' = 3x^2 + 2x - 1$
   Megoldás: $x^3 + x^2 - x + C$

   (c) $y' = 4x - \frac{1}{\sqrt{x}}$
   Megoldás: $\sqrt{x} + C$

   (d) $y' = \sin 2x + \cos \frac{x}{2}$
   Megoldás: $-\frac{1}{2}\cos 2x + 2\sin\frac{x}{2} + C$

Monoton függvények és az első derivált teszt

10. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre a megadott deriváltak alapján.

    - Melyek f kritikus pontjai,
    - Mely intervallumon növekszik, illetve csökken f?
    - Mely pontokban lehet f-nek lokális maximuma vagy minimuma?

    (a) $f'(x) = x(x-1)$
    Megoldás: krit. pontok: 0,1; a $(-\infty, 0)$ és $(1, \infty)$ intervallumokban növekvő, $(0, 1)$-ben csökkenő; Lokális max. $x = 0$-ban, lokális min. $x = 1$-ben.

    (b) $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$
    Megoldás: krit. pontok: -2,1; a $(-2, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumokban növekvő, $(-\infty, -2)$-ben csökkenő; Lokális max. nincs, lokális min. $x = -2$-ben.

    (c) $f'(x) = x^{-1/2}(x-3)$
    Megoldás: krit. pontok: 0,3; a $(3, \infty)$ intervallumon növekvő, $(0, 3)$-ban csökkenő; Lokális max. $x = 3$-ban, lokális min. $x = 0$-ban.

11. - Keressük meg azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény csökken illetve nő;
    - Amennyiben léteznek, határozzuk meg a függvények szélsőértékeit;

- Állapítsuk meg, hogy mely szélsőértékek abszolút szélsőértékek.

(a) $f(x) = -x^3 + 2x^2$
Megoldás: Csökkenő $(-\infty, 0)$-ban és $(4/3, \infty)$-ben, növekvő $(0, 4/3)$-ban; Lokális max. $x = 4/3$-ban 32/27, lokális min. $x = 0$-ban 32/37; nincs abszolút szélsőértéke.

(b) $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$
Megoldás: Csökkenő $(-2\sqrt{2}, -2)$-ben és $(2, 2\sqrt{2})$-n, növekvő $(-2, 2)$-n; Lokális max. $x = -2\sqrt{2}$-ban 0 és $x = 2$-ben 4, lokális min. $x = -2$-ben -4 és $x = 2\sqrt{2}$-ben 0; abszolút max: $x = 2$-ben 4, abszolút min: $x = -2$-ben -4.

(c) $f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1}$
Megoldás: Növekvő $(-\infty, 0)$-ban és $(0, \infty)$-ben; nincsenek lokális szélsőértékei.

(d) $f(x) = x^{1/3}(x^2 - 4)$
Megoldás: Növekvő $(-\infty, -2/\sqrt{7})$-ben és $(2/\sqrt{7}, \infty)$-ben, csökkenő $(-2/\sqrt{7}, 0)$-ban és $(0, 2/\sqrt{7})$-ben; lokális max: $24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx 3.12$ $x = -2/\sqrt{7}$-ben, lokális min: $-24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx -3.12$ $x = 2/\sqrt{7}$-ben; abszolút szélsőérték nincs.

12.
- Határozzuk meg a függvény lokális szélsőértékeit és szésőértékhelyeit az adott tartományon.
- Közülük mely szélsőértékek abszolút szélsőértékek?

(a) $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$
Megoldás: Lokális max: 1 $x = 1$-ben, lokális min: 0 $x = 2$-ben; abszolút max: 1 $x = 1$-ben, nincs abszolút min.

(b) $f(x) = (x+1)^2, \quad -\infty < x <\leq 0$
Megoldás: Lokális max: 1 $x = 0$-ban, lokális min: 0 $x = -1$-ben; abszolút max nincs, abszolút min: 0 $x = -1$-ben

(c) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$
Megoldás: Lokális min: 0 $x = 0$-ban; abszolút max nincs, abszulút min: 0 $x = 0$-ban

Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása

13. Ábrázoljuk a megadott függvények grafikonját; adjuk meg a szélsőértékek és az inflexiós pontok koordinátáit.

(a) $y = x^2 - 4x + 3$
Megoldás: Lokális min: $(2, -1)$

(b) $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$
Megoldás: Inflexiós pont: $(0, 0)$, $(2, 16)$; lokális max: $(3, 27)$

(c) $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$
Megoldás: Inflexiós pont: $(0, 0)$; lokális min: $(-3/2, -27/16)$

(d) $y = x + \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$
Megoldás: Inflexiós pont: (π, π); max: $(2\pi, 2\pi)$; min: $(0, 0)$

(e) $y = \frac{x^2-3}{x-2}, \quad x \neq 2$
Megoldás: Lokális max: $(3, 6)$; lokális min: $(1, 2)$

14. Megadjuk egy folytonos $y = f(x)$ függvény első deriváltját. Határozzuk meg y''-t, aztán ez alapján vázoljuk fel f grafikonjának általános alakját.

(a) $y' = x^2 - x - 6$
Megoldás:

(b) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
Megoldás: $y'' = \frac{2}{\cos^2 x} \operatorname{tg} x$

(c) $y' = \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$
Megoldás: $y'' = -\sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

(d) $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x & x \leq 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$

Megoldás: $y'' = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$

15. Ábrázoljuk részletes diszkusszió után a következő függvényeket.

(a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
(b) $f(x) = \frac{6}{x^2+1}$
(c) $f(x) = \sin 2x$
(d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$
(e) $f(x) = x\sqrt{x + 3}, \quad -3 \leq x < \infty$
(f) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x, \quad -\pi \leq x \leq 2\pi$