Házi feladatok $\sharp 0$

Az 1-4. feladatokat próbálja a Boole-algebra szabályaival megoldani; ha ez nem menne, akkor használjon Venn-diagrammot vagy tartalmazási érvelést.

1. Mutassa meg, hogy $\bar{\bar{A}} = A$ bármely A halmazra!
2. Mutassa meg, hogy $A \cap A = A$ bármely A halmazra!
3. Bizonyítsa be a következő de Morgan-szabályt: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$!
4. Egyszerűsítse le a $((A \setminus B) \cap (B \setminus C)) \cup (C \setminus A)$ kifejezést!
5. Mutassa meg, hogy az alábbi összetett logikai állítás mindig igaz, bármilyen A, B, and C állítások esetén:

   $$(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A) \Rightarrow A \vee B \vee C.$$

   (Használhat igazságtáblázatot vagy Boole-algebrát vagy "józan észt".)

   A következő két feladatban határozza meg a $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ kompozíciókat, értelmezési tartományukkal és értékkészletükkel együtt!

6. $f(x) = -x$ and $g(x) = \sqrt{x}$.
7. $f(x) = \sin(x)$ and $g(x) = 1 + x^2$.
8. Mutassa meg, hogy az alábbi reláció ekvivalencia $\mathbb{Q}$-ban:

   $$\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q} \iff mq = pn.$$

9. Mutassa meg, hogy az alábbi, ún. lexikográfikus rendezés egy (teljes) rendezés $\mathbb{R}^2$-ben:

   $$(x, y) < (u, v) \iff (x < u) \vee (x = u \wedge y < v).$$

10. Mutassa meg, hogy a megszámlálható a legkisebb végtelen számosság, pontosabban, egy A megszámlálható halmaz bármely B végtelen részhalmaza is megszámlálható! (Útmutatás: Az A és $\mathbb{N}$ egy-egyértelmű megfeleltetése alapján találjon a B és $\mathbb{N}$ között is ilyen megfeleltetést!)
11. Mutassa meg, hogy $\sqrt{3}$ irracionális.
12. Mutassa meg, hogy $\log_2 5$ irracionális.
13. Mutassa meg, hogy egy irracionális és egy racionális szám összege mindig irracionális, de két irracionális szám összege lehet racionális is.

14. Igazolja teljes indukcióval:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

15. Az alábbi Bernoulli-egyenlőtlenséget teljes indukcióval igazolja:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (x > -1, n \geq 0).$$

16. A binomiális együttható definíciója: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ha $0 \leq k \leq n$ egész; $0! = 1$. Igazolja az alábbi binomiális tételt teljes indukcióval:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (n \geq 0).$$

17. Az x valós szám abszolút értékének a definíciója: $|x| = x$ ha $x \geq 0$, $|x| = -x$ ha $x < 0$. Mutassa meg az abszolút érték következő tulajdonságait: $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \iff x = 0$; $|xy| = |x||y|$; $|x+y| \leq |x| + |y|$.

18. Keresse meg az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz felső és alsó határát ($\sup A$-t és $\inf A$-t):

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = 2^{1/n}, n \in \mathbb{N}\}.$$