Házi feladat $\sharp 1$

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a $z = x + yi$ ismeretlenre!

   (a) $z = (3+4i)^2 - 2\bar{z}$ (b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{z} = 1 + i$

   (c) $(3-2i)z = 2\bar{z} + 2i - 1$ (d) $z = \bar{z}$

2. Hozza algebrai alakra az alábbi kifejezéseket!

   (a) $\frac{2}{(1-i)(3-i)}$ (b) $\frac{1}{(3+4i)^2}$ (c) $\frac{2+i}{i(-3+4i)}$

3. Használjon trigonometrikus alakot a következő számításokhoz:

   (a) $(1+i\sqrt{3})^{10}$ (b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ (c) $(-1-i\sqrt{3})(1-i)$

   (d) $\frac{3-i\sqrt{3}}{3-i3}$ (e) $(-2\sqrt{3}+2i)^{-9}$

4. Keresse meg i összes köbgyökét!

5. Keresse meg -64 mind a hat hatodik gyökét!

   Az alábbi feladatok nehezebbek, megoldásuk nem okvetlenül szükséges.

6. Keresse meg a polinom összes komplex gyökét és írja fel a polinomot gyöktényezők szorzataként!

   (a) $z^2 - 2z + 2$ (b) $z^6 - 2z^3 + 2$ (c) $z^4 + 4z^2 + 16$

7. Mutassa meg, hogy két komplex szám összegének (ill. szorzatának, ill. hányadosának) konjugáltja megegyezik a konjugáltjaik összegével (ill. szorzatával, ill. hányadosával)!

8. Az előző feladat segítségével mutassa meg, hogy ha egy z_0 komplex szám gyöke egy valós együtthatós $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinomnak, akkor $\bar{z}_0$ is gyöke! Ezért egy valós együtthatós polinomnak a gyökei valósak, ill. konjugált komplex párok.

9. Komplex algebra segítségével mutassa meg a komplex számok abszolút értékének a következő tulajdonságait (ahol Re = valós rész):

$$|z| \geq 0; \qquad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0; \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|;$$
$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2); \qquad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$