

Házi feladat #11

1. Keresse meg p azon értékeit, amelyekre az alábbi improprius integrálok konvergensek!

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad (b) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

2. Keresse meg p azon értékeit, amelyekre az alábbi improprius integrálok konvergensek!

$$(a) \int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p} \quad (b) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

3. Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek vagy divergensek! (Nem kell kiszámítani a konvergensek értékét.)

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^x} \quad (b) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (d) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(e) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \quad (f) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \quad (g) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}} \quad (h) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$$

$$(i) \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} dx \quad (j) \int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x} dx \quad (k) \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

4. Becsülje meg a $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ improprius integrál értékét! Útmutatás: Használja a trapéz- vagy Simpson-formulát $n = 6$ esetén az $\int_0^3 e^{-x^2} dx$ integrálra és mutassa meg, hogy

$$0 < \int_3^{\infty} e^{-x^2} dx < \int_3^{\infty} e^{-3x} dx < 10^{-4}.$$

5. (*Gábrriel harsonája*)

Forgassuk meg az $y = 1/x$, $1 \leq x < \infty$ görbét az x -tengely körül. Mutassuk meg, hogy a kapott forgástest térfogata véges, de felületének felszíne végtelen! („Ez olyan edény, amelybe nem fér annyi festék, hogy a külső felületét befessük.”)