

Házi feladat #2

1. Keresse meg az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok közti szöget, a \mathbf{b} vektor skalár vetületét az \mathbf{a} vektorra, majd írja fel a \mathbf{b} vektort az \mathbf{a} vektorral párhuzamos és arra merőleges vektorkomponensek összegeként!

(a) $\mathbf{a} = (0, 5, -3)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$

(b) $\mathbf{a} = (2, -4, \sqrt{5})$, $\mathbf{b} = (-2, 4, -\sqrt{5})$

2. Az adott $A(2, 1, 0)$, $B(2, -1, 1)$ és $C(1, 0, 2)$ pontok esetén számítsa ki az ABC háromszög területét, az $OABC$ tetraéder térfogatát és az $ABCD$ paralelogramma D csúcsának koordinátáit!
3. Írja fel a $A(2, 4, 5)$, $B(1, 5, 7)$ és $C(-1, 6, 8)$ pontokon átmenő sík egyenletét! Számítsa ki a $P(1, 2, 3)$ pont távolságát a fenti síktól! Írja fel a P ponton átmenő, a fenti síkra merőleges egyenes egyenletét! Keresse meg a P pontnak a fenti síkra való merőleges P' vetületének koordinátáit!
4. Keresse meg az $x - 2y + 4z = 2$ és $x + y - 2z = 5$ síkok metszésvonalának egyenletét!
5. Írja fel a $P(1, -5, -3)$ és $Q(5, 0, -4)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét! Írja fel a két pont közötti egyenes szakasz F felező pontjának koordinátáit!
6. Mutassa meg, hogy az

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-1}{3} \quad \text{és} \quad \frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

egyenletű egyenesek metszik egymást! Határozza meg az M metszéspont koordinátáit! Írja fel az M ponton keresztül menő, a két egyenes közti szöget felező egyenes egyenletét!

7. Határozza meg a $P(5, -1, -4)$ pont távolságát az

$$x = 2t - 1, \quad y = -3t, \quad z = 3t + 4 \quad (t \in \mathbb{R})$$

egyenletű egyenestől! Írja fel a P ponton átmenő és az adott egyenesre illeszkedő sík egyenletét!

8. Mutassa meg, hogy az

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-3}{4} \quad \text{és} \quad \frac{x+2}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-8}$$

egyenletű egyenesek párhuzamosak! Határozza meg a távolságukat! Írja fel a két egyenesre illeszkedő sík egyenletét!

Az alábbi feladatokat nem feltétlenül szükséges megoldania.

9. Igazak-e az alábbi következtetések? Ha valamelyik igaz, akkor bizonyítsa be, ha nem, akkor adjon rá egy ellenpéldát!

(a) Ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2$ és $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$.

(b) Ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2$ és $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$.

10. Algebrailag mutassa meg a vektor-hossz alábbi tulajdonságait: $|\mathbf{r}| \geq 0$; $|\mathbf{r}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{0}$; $|\alpha \mathbf{r}| = |\alpha| |\mathbf{r}|$ ($\alpha \in \mathbb{R}$); $|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2| \leq |\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2|$ (*háromszög egyenlőtlenség*).

11. Keresse meg az $x = 1 - t$, $y = 3t$, $z = 1 + t$ egyenesnek a $2x - y + 3z = 6$ síkon vett merőleges vetületének egyenletét!

12. Mutassa meg, hogy az

$$x = 2 + 3t, \quad y = 1 - 5t, \quad z = -3 + 2t \quad \text{és} \quad x = 3 + 2s, \quad y = 1 + 6s, \quad z = 5 + 7s$$

egyenletű egyenesek kitérőek! Határozza meg a távolságukat! Írja fel a normál transzverzálisuk egyenletét!