Házi feladat ♯3

1. A határérték definíciója alapján igazolja az állítást és határozzon meg egy N küszöbindexet az $\epsilon = 10^{-4}$ hibakorláthoz!

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = 0 \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \qquad \text{(c)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3}$$

2. A ∞-hez tartás definíciója alapján mutassa meg, hogy az $a_n = n^2 - 4n$ sorozat ∞-hez tart, és határozzon meg az $M = 2000$ alsó küszöbértékhez egy N küszöbindexet!

3. A határérték definíciója alapján igazolja, hogy az $a_n = (-1)^n$ sorozat divergens!

4. A tanult tételek alapján vizsgálja meg, hogy az alábbi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatok konvergensek-e vagy divergensek! Ha egy sorozat konvergens, határozza meg a határértékét is!

$$\text{(a)}\ a_n = \frac{1+n}{1+n^2} \qquad \text{(b)}\ a_n = \frac{2^n}{n!} \qquad \text{(c)}\ a_n = \frac{n^4}{4^n} \qquad \text{(d)}\ a_n = \frac{2^n}{n^n}$$

$$\text{(e)}\ a_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}} \qquad \text{(f)}\ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad \text{(g)}\ a_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

$$\text{(h)}\ a_n = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n \qquad \text{(i)}\ a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \text{(j)}\ a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

5. Határozza meg a határértékeket!

   (a)
$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(1 - \frac{\sin n}{n}\right) =?$$

   (b)
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\tan\frac{1}{n}\right)\right) =?$$

6. Mutassa meg, hogy az alábbi két rekurzíven definiált sorozat monoton növő és felülről korlátos, és így konvergens! Az első sorozatnak határozza meg a határértékét is, a második határértékének csak egy közelítő értékét határozza meg!

   (a)
$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \qquad (n \geq 1);$$

   (b)
$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}} \qquad (n \geq 1).$$