

Házi feladat #4

1. Határozza meg az $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ kompozíciókat (összetett függvényeket), értelmezési tartományukkal és értékkészletükkel együtt!

(a) $f(x) = -x$ és $g(x) = \sqrt{x}$.

(b) $f(x) = \sin(x)$ és $g(x) = 1 + x^2$.

2. Adjon meg egy olyan intervallumot, ahol létezik az alábbi függvények inverze! Írja fel az inverzfüggvényt, adja meg az értelmezési tartományát és értékkészletét!

(a) $y = x$ (b) $y = \frac{1}{x}$ (c) $y = \frac{1}{1-x}$ (d) $y = \frac{x}{1+x}$ (e) $y = \frac{1}{x^2-1}$

(f) $y = 1 - \frac{4}{(5x+2)^3}$ (g) $y = 1 - e^{-3x}$ (h) $y = \ln(1 + \cos^2 x)$

3. A definíció alapján mutassa meg, hogy bármely $k \in \mathbf{Z}$ esetén,

$$\lim_{x \rightarrow k-} \lfloor x \rfloor = k - 1, \quad \lim_{x \rightarrow k+} \lfloor x \rfloor = k.$$

4. Rajzolja fel a függvény grafikonját, és az ábra alapján keresse meg az L határértéket az x_0 pontban, valamint határozzon meg olyan $\delta > 0$ számot, amelyre bármely x , $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén fennáll $|f(x) - L| < \epsilon$.

(a) $f(x) = 3 - x^2$, $x_0 = -1$, $\epsilon = 0.1$

(b) $f(x) = 2\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$, $\epsilon = 0.1$

(c) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 0.1$

5. Algebrailag keresse meg az L határértéket az x_0 pontban, valamint határozzon meg olyan $\delta > 0$ számot, amelyre bármely x , $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén fennáll $|f(x) - L| < \epsilon$.

(a) $f(x) = 4/x$, $x_0 = 2$, $\epsilon = 0.1$

(b) $f(x) = \sqrt{1-5x}$, $x_0 = -3$, $\epsilon = 0.1$

6. A definíció alapján mutassa meg, hogy bármely $x_0 \neq 0$ esetén,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}.$$

7. Példákkal mutassa meg, hogy az alábbi állítások hamisak!

(a) Az L szám az $f(x)$ határértéke $x \rightarrow x_0$ esetén, ha $f(x)$ egyre közelebb kerül L -hez, amint x közelebb kerül x_0 -hoz.

(b) Az L szám az $f(x)$ határértéke $x \rightarrow x_0$ esetén, ha bármely $\epsilon > 0$ -hoz van olyan x , amelyre $|f(x) - L| < \epsilon$.

8. Keresse meg a határértékeket a tanult tételek alkalmazásával!

$$(a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} \quad (b) \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} \quad (g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad (h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x^3 - x^2}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} \quad (j) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} \quad (k) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$