Házi feladat $\sharp 6$

1. Keresse meg az $(f \circ g)'$ összetett függvény deriváltat, ha

$$f(u) = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x = -1.$$

2. Tegyük fel, hogy egy szappanbuborék sugara 10 cm és simán növekszik (vagyis a sugár az időnek differenciálható, növő függvénye) 1/2 cm/s sebességgel. Mennyi a térfogat változási sebessége?

3. Tegyük fel, hogy az alábbi egyenletek az y változót az x változó differenciálható függvényeként definiálják az adott (x_0, y_0) pont egy környezetében (vagyis egy nyílt körlapon a pont körül). Ellenőrizze, hogy a megadott pont tényleg eleget tesz az egyenletnek! Keresse meg a dy/dx deriváltat implicit differenciálással! Írja fel a görbe érintőjének egyenletét az adott pontban! (Az érintő megadja a függvény lineáris közelítését az adott pont körül még akkor is, ha nehéz, vagy nem lehet elemi függvénnyel kifejezni y-t az x függvényeként.)

   (a) $x^3 - xy + y^3 = 1 \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$

   (b) $x^2 - y^2 + y^4 = 0 \quad x_0 = \sqrt{3}/4, \quad y_0 = \sqrt{3}/2;$
   illetve $x_0 = \sqrt{3}/4, \quad y_0 = 1/2.$

   (c) $x + \sin y = \frac{3}{\pi} xy \quad x_0 = 2, \quad y_0 = \frac{\pi}{2}.$

4. Keresse meg a függvény lineáris közelítését az adott pont körül! Ennek a segítségével közelítse a megadott mennyiséget! Számológéppel határozza meg a pontos értéket és a lineáris közelítés hibáját!

   (a) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad \sin 0.1.$

   (b) $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0, \quad \sqrt{1.008}.$

   (c) $f(x) = (1+x)^{10}, \quad x_0 = 0, \quad 1.01^{10}.$

   (d) $f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0, \quad \frac{1}{1.02}.$

   (e) Írja fel a (b), (c) és (d) esetek általánosítását: legyen $f(x) = (1+x)^\alpha$, ahol α rögzített valós szám. Mutassa meg, hogy ekkor a függvény lineáris közelítése az $x_0 = 0$ pontban $L(x) = 1 + \alpha x$.

5. (Egyenlet linearizációval kapott közelítő megoldása) Legyen $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1+x} - 4$.

   (a) Keresse meg $f(3)$ és $f(4)$ értékét, és a Bolzano-tétel alapján lássa be, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek van gyöke a $[3, 4]$ intervallumban!

   (b) A megoldás közelítése céljából közelítse a négyzetgyököket az $x_0 = 3$ pontbeli linearizációjukkal, és oldja meg a kapott lineáris egyenletet!

   (c) Ellenőrizze a kapott közelítést az eredeti egyenletben!

6. Két repülőgép 10 000 méter magasságban repül 800 km/h sebességgel, egymást derékszögben metsző pályákon. Milyen sebességgel csökken a két gép közötti távolság, ha az egyik gép 8 kilométerre, a másik pedig 19 kilométerre van a metszésponttól?

7. Mutassa meg, hogy az alábbi egyenleteknek pontosan egy megoldása van a megadott intervallumokon!

   (a) $x^4 + 3x + 1 = 0, \quad -2 \leq x \leq -1.$

   (b) $2x - \cos x = 0, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$

8. A Lagrange-féle középérték-tétellel igazolja, hogy bármely a és b valós számra fennáll $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

9. Tegyük fel, hogy $f'(x) = 1/(1 - x^4)$ ha $0 \leq x \leq 0.1$ és $f(0) = 2$. A középérték-tétel segítségével adjon alsó és felső becslést $f(0.1)$ értékére!

10. Mutassa meg, hogy az $f(x) = x^4 + x - 3$ függvénynek van gyöke a -2 és -1, valamint az 1 és 2 pontok között! A Newton-módszer segítségével adjon két tizedesjegyre pontos közelítést a gyökökre!

11. (Divergencia a Newton-módszernél) Alkalmazza a Newton-módszert az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvényre $x_1 = 1$ esetén! Mutassa meg, hogy a kapott $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat divergens! Rajzoljon ábrát, ami mutatja, hogy mi történik itt!

12. (Nagyon lassú konvergencia a Newton-módszerrel) Alkalmazza a Newton-módszert az $f(x) = (x - 1)^{40}$ függvényre az $x_1 = 2$ kezdeti értékkel! Rajzoljon ábrát, ami mutatja, hogy mi történik itt!

13. Vizsgálja meg az alábbi függvényeket (értelmezési tartomány, tengelymetszetek, aszimptoták, növés-fogyás, konvexitás-konkávitás, szélső értékek)! Készítsen egy összefoglaló táblázatot, és rajzolja fel a függvény grafikonját!

    (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1;$ (b) $f(x) = x - \cos x, \quad -\pi \leq x \leq \pi;$

    (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2};$ (d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$

14. Mik a méretei a legkönnyebb olyan nyitott hengeres tartálynak, amelybe 1000 cm^3 folyadék fér?

15. Az optika Fermat-elve szerint két pont között a fény olyan úton halad, amely mentén a fényterjedési idő a lehető legrövidebb. Mutassa meg, hogy a Fermat-elv alapján fényvisszaverődésnél a beesés szöge meg kell egyezzen a visszaverődés szögével! (Útmutatás: Van nagyon egyszerű geometriai bizonyítás, de próbáljon analitikus bizonyítást is adni!)