1. gyakorlat
Matematika A2

1. Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, amennyiben lehetséges:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Legyenek adva az $A_{4\times5}$, $B_{5\times4}$, $C_{5\times2}$, $D_{4\times2}$, $F_{4\times5}$ mátrixok. Az alábbi kifejezések közül melyek vannak definiálva, és milyen a típusuk:
a) AF, b) $BD - C$, c) $ABF + DC^T$, d) $(B^T + A)C + D$.

3. Mutassuk meg, hogy ha AB és BA is értelmezve vannak, akkor AB és BA is négyzetesek.

4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok összes pozitív egész kitevős hatványait:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$

5. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}, \ (n \in N^+)$$

ahol F_n az n-edik Fibonacci-számot jelöli.

6. Írjuk fel szummajelek segítségével az alábbi műveletek elvégzése után kapott mátrix megadott elemét:
a) $[a_{ij}]_{5\times6} = [b_{ij}]_{5\times4}[c_{ij}]_{4\times6}$, $a_{23} =?$ b) $[a_{ij}]_{n\times m} = ([b_{ij}]_{n\times k}[c_{ij}]_{k\times l})[d_{ij}]_{l\times m}$, $a_{23} =?$
c) $[a_{ij}]_{n\times m} = [b_{ij}]_{n\times k}([c_{ij}]_{k\times l}[d_{ij}]_{l\times m})$, $a_{23} =?$ d) $[a_{ij}]_{n\times m} = [b_{ij}]_{n\times k}[c_{ij}]_{k\times l}[d_{ij}]_{l\times m}$, $a_{ij} =?$

7. Gauss elminációval oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\ -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 17 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 4x_5 &= 9 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 &= 15 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_4 + x_5 + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8. Számítsuk ki a következő mátrixok inverzét:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2\imath + 2 & 2\imath - 3 & \imath \\ 1 & \imath & 2\imath \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$