**2. gyakorlat**
**Matematika A2**

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2\imath & 1+2\imath \\ 3 & \imath & 3-\imath \\ 4\imath & -3 & -1+4\imath \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Milyen a,b-re lesz az alábbi mátrixok rangja 1,2 ill. 3?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & a \\ b & 0 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & a & b \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Tekintsük a $\mathbb{C}^3$ vektorteret és ennek azokat a $\mathcal{D}$ részhalmazait, amelynek elemei a
a) $\xi_1$ valós b) $\xi_1 = 0$ c) vagy $\xi_1 = 0$ vagy $\xi_2 = 0$ d) $\xi_1 + \xi_2 = 0$ e) $\xi_1 + \xi_2 = 1$

feltételeknek eleget tevő $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ vektorok. Melyik esetben lesz $\mathcal{D}$ vektortér?

4. Legyen $\mathcal{P}$ az összes valós együtthatós polinom által alkotott vektortér. Definiáljuk ennek $\mathcal{D}$ részhalmazait azoknak az $p(x)$ vektoroknak (polinomoknak) az összegeként, amelyekre:
a) $p(x)$ harmadfokú b) $2p(0) = p(1)$
c) $p(x) \geq 0$ ha $0 \leq x \leq 1$ d) $p(x) = p(1-x)$ minden $x$-re

Melyik esetben lesz $\mathcal{D}$ vektortér?

5. Mi történik egy $n \times n$-es $A$ mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi $n \times n$-es mátrixokkal megszorozzuk?

a) $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ c) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. Döntsük el az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból, hogy lineárisan függetlenek-e. Ha nem, fejezzük ki az egyiket a többi lineáris kombinációjaként.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

7. Vizsgáljuk az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorok összefüggőségét:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Legyen $T$ a 3 elemű test. Mennyiben változik a helyzet, ha a fenti vektorokat $T^4$-beliek?

8. Legyenek $\underline{u_1}, \underline{u_2}, \underline{u_3}, \underline{u_4} \in \mathbb{R}^8$ lineárisan függetlenek. Döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.
a) $\underline{u_1} - \underline{u_2}$, $\underline{u_2} - \underline{u_3}$, $\underline{u_3} - \underline{u_4}$ b) $\underline{u_1} - \underline{u_2}$, $\underline{u_2} - \underline{u_3}$, $\underline{u_3} - \underline{u_1}$
c) $\underline{u_1} + \underline{u_2}$, $\underline{u_2} + \underline{u_3}$, $\underline{u_3} + \underline{u_4}$, $\underline{u_4} + \underline{u_1}$ d) $\underline{u_1} + \underline{u_2}$, $\underline{u_2} + \underline{u_3}$, $\underline{u_3} + \underline{u_4}$, $\underline{u_4} + \underline{u_2}$