3. gyakorlat
Matematika A2

1. Állapítsuk meg, hogy az alábbi 3-dimenziós tenzorok közül melyik lineáris, melyik planáris és melyik teljes tenzor?
   a) $f(x,y,z) = [x+y, y+z, z+x]$ b) $f(x,y,z) = [x-y, 2x+z, 2y+z]$
   c) $f(x,y,z) = [x, x+y, x+y+z]$ d) $f(x,y,z) = [x+2y-3z, 2x-y+z, -5y+7z]$

2. Írjuk fel a T tenzor mátrixát az $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan, és határozzuk meg T értékkészletének dimenzióját, vagyis azt, hogy T lineáris, planáris vagy teljes:
   a) $T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$
   b) $T\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\\4\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$

3. Mutassuk meg, hogy az alábbi tarnszformációk kétdimenziós tenzort definiálnak, és adjuk meg a mátrixukat az $[1,0]$, $[0,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan:
   a) tükrözés az $x=0$ egyenesre b) tükrözés az $y=x$ egyenesre c) k-szoror nyújtás
   d) tükrözés az origóra e) α-szögű origó körüli forgatás f) vetítés az x-tengelyre

4. Írjuk fel a T tenzornak a megadott $\{f_1, f_2\}$ ill. $\{f_1, f_2, f_3\}$ vektorrendszerre vonatkozó T_f mátrixát:
   a) $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4x-2y\\6x-3y\end{bmatrix}$, $f_1 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
   b) T az x-tengelyre vonatkozó tükrözés, $f_1 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
   c) $y = 2x$ egyenesre való merőleges vetítés, $f_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

5. Legyen V a legfeljebb 2-odfokú polinomok vektortere írjuk fel az $f \mapsto f'$ leképezés mátrixát a következő bázisokban:
   a) 1, x, x^2 b) $1+x$, $x+x^2$, x^2+1
   c) x^2+1, $-2x^2+2x$, x^2-1 d) x^2+x+1, $2x+1$, $-x^2-x+1$

6. Az alábbi $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ megfeleltetések lineáris transzformációk-e $\mathbb{R}$ felett, és ha igen, adjuk meg kép- illetve magterüket és ezek dimenzióját. Minden z komplex számnak feleltessük meg
   a) $Re(z)$-t b) $max\{Re(z), Im(z)\}$-t c) $|z|$-t
   d) a szögét e) a konjugáltját f) $\pi(1+\imath)Re(z) - \sqrt{2}(1111\imath - \frac{5}{3})Im(z)$-t

7. Mi lesz az $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ lineáris transzformáció, ha
   a) $\mathcal{A}$ az x-tengelyre, $\mathcal{B}$ az y- tengelyre történő tükrözés
   b) $\mathcal{A}$ az x-tengelyre, $\mathcal{B}$ az y-tengelyre történő merőleges vetítés

8. Döntsük el, hogy teljesül-e az $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ összefüggés az alábbi esetekben:
   a) $\mathcal{A}$ az x-tengelyre, $\mathcal{B}$ az $y=x$ egyenesre történő tükrözés
   b) $\mathcal{A}$ az x-tengelyre, $\mathcal{B}$ az $y=x$ egyenesre történő merőleges vetítés
   c) $\mathcal{A}$ az origó körüli $+60$ fokos, $\mathcal{B}$ az origó körüli -90 fokos elforgatás

9. Van-e olyan $\mathcal{A}$ lineáris leképezés a síkban, melynek két különböző bázisban felírt mátrixa:
   a) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$