3. gyakorlat
Matematika A2

1. Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények közül melyik, és a lineárisak közül melyik tenzor:
   a) $f(x,y) = [2x-y, -2x]$ b) $f(x,y) = [x^2+y^2, 0]$ c) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1, 2x_2, \ldots, nx_n]$
   d) $f(x,y,z) = [0,0,0]$ e) $f(x,y) = [x,y]$ f) $f(x,y,z) = [x+y, y+z]$
   g) $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y \\ x-3y \end{bmatrix}$ h) $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y-1 \\ x-3y+1 \end{bmatrix}$ i) $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Az alábbi G transzformációk közül melyik tenzor, és a tenzorok közül melyik teljes, planáris ill. lineáris?
   a) a egy rögzített vektor, G rendelje az r vektorhoz annak a-val párhuzamos komponensét.
   b) S egy adott n normálvektorú sík, G rendelje az r vektorhoz annak S-re merőleges vetületét.
   c) S egy adott n normálvektorú sík, G rendelje az r vektorhoz annak S-re való tükörképét.
   d) a egy rögzített vektor, G rendelje az r vektorhoz az $a+r$ vektort.

3. Állapítsuk meg, hogy az alábbi 3-dimenziós tenzorok közül melyik lineáris, melyik planáris és melyik teljes tenzor?
   a) $f(x,y,z) = [x+y, y+z, z+x]$ b) $f(x,y,z) = [x-y, 2x+z, 2y+z]$
   c) $f(x,y,z) = [x, x+y, x+y+z]$ d) $f(x,y,z) = [x+2y-3z, 2x-y+z, -5y+7z]$
   e) $f(x,y,z) = [x-2y, -x+2y, 2x-4y]$ f) $f(x,y,z) = [\pi y, \frac{1}{\pi}y, y]$

4. Adjuk meg az összes olyan T tenzot mátrixát az $[1,0]$, $[0,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan, amely teljesíti a megadott feltételeket:
   a) $T\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
   c) $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. Írjuk fel a T tenzor mátrixát az $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan, és határozzuk meg T érékkészletének dimenzióját, vagyis azt, hogy T lineáris, planáris vagy teljes:
   a) $T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
   b) $T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

6. Mutassuk meg, hogy az alábbi tarnszformációk kétdimenziós tenzort definiálnak, és adjuk meg a mátrixukat az $[1,0]$, $[0,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan:
   a) tükrözés az $x=0$ egyenesre b) tükrözés az $y=x$ egyenesre
   c) $[x,z] \mapsto [x+ky, y]$, $k \in \mathbb{R}$ d) k-szoror nyújtás
   e) tükrözés az origóra f) α-szögű origó körüli forgatás
   g) vetítés az x-tengelyre

7. Írjuk fel annak a 3-dimenziós tenzornak a mátrixát, amely minden vektorhoz annak:
   a) x-tengelyre eső merőleges vetületét rendeli
   b) xy síkra eső merőleges vetületét rendeli
   c) x-tengely körüli α-szögű elforgatottját rendeli
   d) xy síkra vonatkozó tükörképét rendeli

8. Írjuk fel a T tenzornak a megadott $\{f_1, f_2\}$ ill. $\{f_1, f_2, f_3\}$ vektorrendszerre vonatkozó T_f mátrixát:

a) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x-2y \\ 6x-3y \end{bmatrix}$, $f_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) T az x-tengelyre vonatkozó tükrözés, $f_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y \\ y \\ y-z \end{bmatrix}$, $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $y = 2x$ egyenesre való merőleges vetítés, $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. Legyen V a legfeljebb 6-adfokó polinomok vektortere. Döntsük el, hogy az alábbi megfeleltetések lineáris transzformációk-e V-n, és ha igen, adjuk meg kép- illetve magterüket és ezek dimezióját:

   a) $f \mapsto f'$
   b) $f(x) \mapsto xf(x)$
   c) $f(x) \mapsto f(x) - xf'(x)$
   d) $f \mapsto a_n x^2$
   e) f maradéka $x^4 + 4x + 1$-el osztva
   f) $f \mapsto (degf)x^3$

   A továbbiakban legyen $\mathcal{A}$ az a lineáris transzformáció, amely minden polinomnak megfelelteti a deriváltját.

   a) Írjuk fel $\mathcal{A}$ mátrixát a szokásos bázisban.
   b) Van-e olyan bázis V-ben, amelyben $[\mathcal{A}]$ minden eleme 0 vagy 1?
   c) Van-e olyan bázis V-ben, amelyben $[\mathcal{A}]$ utolsó két oszlopa csupa 0?

   Most a legfeljebb 2-odfokú polinomokra szorítkozva írjuk fel a fentebb tárgyalt leképezés mátrixát a következő bázisokban:

   a) $1 + x,\ x + x^2,\ x^2 + 1$
   b) $x^2 + 1,\ -2x^2 + 2x,\ x^2 - 1$
   c) $x^2 + x + 1,\ 2x + 1,\ -x^2 - x + 1$

10. Döntsük el, hogy az alábbi $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ megfeleltetések lineáris transzformációk-e $\mathbb{R}$ felett, és ha igen, adjuk meg kép- illetve magterüket és ezek dimezióját. Minden z komplex számnak feleltessük meg

    a) $Re(z)$-t
    b) $max\{Re(z), Im(z)\}$-t
    c) $|z|$-t
    d) a szögét
    e) a konjugáltját
    f) $\pi(1 + \imath)Re(z) - \sqrt{2}(1111\imath - \frac{5}{3})Im(z)$-t

11. Mi lesz az $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ lineáris transzformáció, ha

    a) $\mathcal{A}$ az x-tengelyre, $\mathcal{B}$ az y- tengelyre történő tükrözés
    b) $\mathcal{A}$ az x-tengelyre, $\mathcal{B}$ az y-tengelyre történő merőleges vetítés
    c) $\mathcal{A}$ az origó körüli $+60$ fokos, $\mathcal{B}$ az origó körüli -60 fokos elforgatás

12. Döntsük el, hogy teljesül-e az $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ összefüggés az alábbi esetekben:

    a) $\mathcal{A}$ az x-tengelyre, $\mathcal{B}$ az $y = x$ egyenesre történő tükrözés
    b) $\mathcal{A}$ az x-tengelyre, $\mathcal{B}$ az $y = x$ egyenesre történő merőleges vetítés
    c) $\mathcal{A}$ az origó körüli $+60$ fokos, $\mathcal{B}$ az origó körüli -90 fokos elforgatás

13. Van-e olyan $\mathcal{A}$ lineáris leképezés a síkban, melynek két különböző bázisban felírt mátrixa:

    a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
    b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$